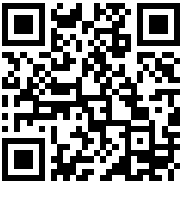
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

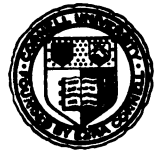
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Mathematics
QA
1
P44
ser. 4
v. 7

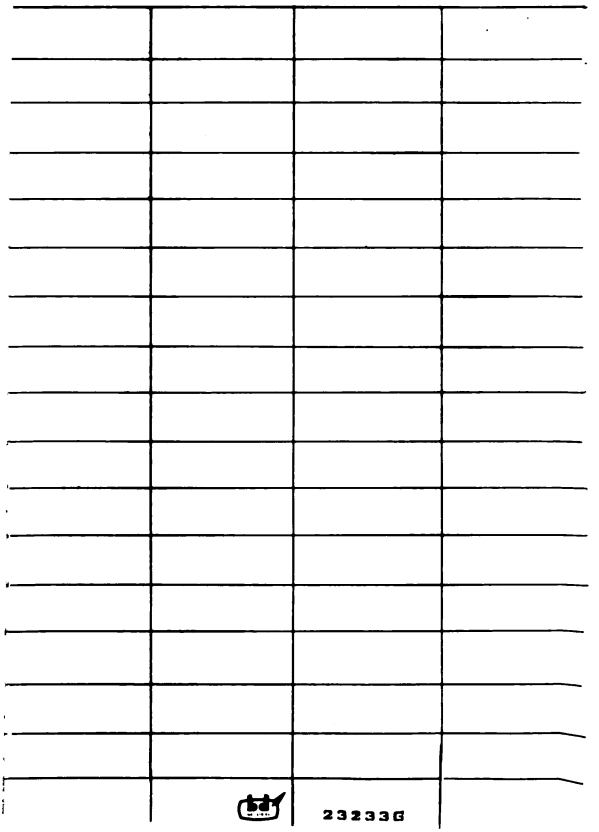
CORNELL
UNIVERSITY
LIBRARY



MATHEMATICS

Digitized by Google

PERIODICAL
Date Due



232336

CORNELL UNIVERSITY LIBRARY
3 1924 054 648 674

Digitized by Google

Digitized by Google

PERIODICO DI MATEMATICHE

STORIA - DIDATTICA - FILOSOFIA

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA "MATHESIS"

DIRETTORI: F. ENRIQUES - G. LAZZERI
Redattori: E. BORTOLOTTI - E. DANIELE - A. PERNA - C. ROSATI
Segretario di Redazione: O. CHISINI

SERIE IV - VOLUME VII - MCMXXVII

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

RcT

Digitized by Google

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Bologna - Cooperativa Tipografica Azzoguidi XI - 1927

Digitized by Google

INDICE DEL VOLUME

ARTICOLI

BEHMANN H. - I principi della Logica Simbolica . . . . . Pag. 213
BIGGIOGERO G. - I triangoli Eroniani dal punto di vista della geometria algebrica . . . . . » 82
BORTOLOTTI E. - Le « Opere di Diofanto » tradotte da Paul ver Eecke . . . . . » 42
— Un quesito di Zuan da Coi ed il problema di Delo . . . . » 240
CARRUCCIO E. - Il « Nuovo metodo » di Leibniz, con note storiche » 285
CHISINI O. - Alcune considerazioni sul segno delle distanze in Geometria analitica . . . . . » 263
ENRIQUES F. - La definizione come problema scientifico . . . . » 73
— Sull'immaginario in geometria (Parte I) . . . . . » 140
— La teoria matematica della lotta per l'esistenza secondo Vito Volterra . . . . . » 111
— Sull'immaginario in geometria (Parte II) . . . . . » 231
ERRERA A. - Exposé historique du problème des quatres couleurs . » 20
FERRATINI A. - Alessandro Volta ed i Chimici del suo tempo . » 187
FERRERO C. - Una questione di analisi indeterminata di 1° grado » 257
FURLANI G. - L'opera di Alessandro Volta nell'invenzione e nello studio della pila. . . . . » 154
MAGGI A. - In quanto tempo un pianeta, fermato, cadrebbe nel sole » 329
NATUCCI A. - Sull'area del segmento circolare e su una regola empirica di L. B. Alberti . . . . . » 242
PASTORI M. - Le serie divergenti . . . . . » 302
PERSICO E. - I principii della nuova meccanica ondulatoria . . » 1
ROVETTI C. - Triangoli Eroniani . . . . . » 50
TEDESCHI B. - A proposito di « Due osservazioni didattiche » di A. Padoa . . . . . » 63
TRICOMI F. - Alcune considerazioni generali sui calcoli numerici » 102
TURCHETTI M. - Il teorema di Cauchy sulla determinazione di un poliedro mediante le sue facce . . . . . » 320
VERCELLI F. - L'età della terra . . . . . » 129
ZAPELLONI M. T. - I concetto di rapporto nel V libro dell'Euclide » 86

Digitized by Google

RECENSIONI E NOTE BIBLIOGRAFICHE

AGOSTINI A. (Bortolotti E.) - Esercizi di Geometria analitica (O. C.) Pag. 203
AMPÈRE - (v. Solovine).
BORTOLOTTI E. - (v. Agostini).
BRICARD R. - Leçons de Cinématique, tome II. Cinématique appliquée (G. S) . . . . . » 204
CARNOT (v. Solovine).
D'ALEMBERT (v. Solovine).
HALDANE J. B. S. - Daedalus (A. Natucci) . . . . . » 262
— Callinicus (A. Natucci) . . . . . » 262
JULIA G. - Elements de Géométrie infinitesimale (G. S.). . . . » 328
LAPLACE (v. Solovine).
LAVOISIER (v. Solovine).
MONGE (v. Solovine).
PANKHURST S. - Delphos: The future of international language (A. Natucci) . . . . . » 261
RUSSEL B. - Icarus (A. Natucci) . . . . . » 262
— What I Believe (A. Natucci) . . . . . » 262
RUSSELL B. (Mrs) - Hypatia (A. Natucci) . . . . . » 262
SCHILLER F. C. S. - Tantalus (A. Natucci) . . . . . » 262
SOLOVINE M. - Les Maitres de la pensée scientifique (F. E.) . . » 109
— Science et civilisation (F. E.) . . . . . » 109
THIRRING H. (v. Solovine).
URBAIN G. (v. Solovine).

QUESTIONI PROPOSTE E RISOLTE

Pagine - 64, 114, 205, 269, 331.

NOTIZIE

Pagina - 277.

ATTI DELLA SOCIETÀ " MATHESIS „

Pagine - 67, 129, 207, 278, 343.

ATTI DELL'ISTITUTO NAZIONALE PER LA STORIA DELLE SCIENZE

Pagina - 351.

NECROLOGI

Andrea Fontebasso . . . . . Pag. 284
Silvio Bandini . . . . . » 355

Digitized by Google

I principi della nuova meccanica ondulatoria

I. Introduzione.

È noto che la teoria dei quanti ha permesso di interpretare, per mezzo di convenienti modelli atomici, un gran numero di fatti sperimentali: basterebbe citare, come l'esempio più tipico e impressionante, l'insieme dei risultati raggiunti in spettroscopia, in cui non soltanto la teoria dei quanti ha fornito delle interpretazioni teoriche abbastanza soddisfacenti di molte relazioni trovate empiricamente tra le frequenze delle linee spettrali emesse da un dato elemento, ma per certi elementi, come l'idrogeno e l'elio, ha permesso di calcolare, in base alla conoscenza di sole costanti universali, tutte le frequenze di un intero spettro; e la previsione è in così perfetto accordo con l'esperienza, che se si disegnasse su una lastra fotografica di dimensioni usuali lo spettro calcolato, e si fotografasse poi sulla stessa lastra e nella stessa scala, mediante lo spettrografo, il vero spettro dell'elemento, sarebbe assolutamente impossibile distinguere, anche col microscopio, la più piccola mancanza nella reciproca sovrapposizione delle due immagini. Con altrettanto mirabile precisione si possono prevedere le modificazioni a cui sono soggetti questi spettri quando la sostanza luminosa si trova in un campo elettrico o magnetico (effetti Stark e Zeeman). E accanto a questi risultati quantitativi, che vanno in parte estesi anche ad elementi più complessi, vi è una gran mole di risultati qualitativi non meno importanti, anche fuori del campo spettroscopico.

Tuttavia la teoria dei quanti non è, nè è mai stata, considerata una teoria completa e definitiva, e lo si comprende facilmente anche pensando solo al suo aspetto più elementare,

Digitized by Google

cioè alla teoria dell'atomo di idrogeno ad orbite circolari. Si comincia col considerare l'atomo come un sistema di due punti materiali (nucleo ed elettrone) carichi di elettricità, e quindi attraentisi secondo la legge elettrostatica elementare, e soggetti alle ordinarie leggi della meccanica. Si trova allora, naturalmente, che l'elettrone può ruotare intorno al nucleo descrivendo una circonferenza di raggio qualunque, purchè la velocità sia tale che la forza centrifuga eguagli l'attrazione elettrostatica. Si introduce allora il primo postulato della teoria: di queste infinite orbite meccanicamente possibili, soltanto alcune sono *realmente* possibili, e precisamente quelle per le quali il momento della quantità di moto (mrv) è un multiplo intero di $\frac{h}{2\pi}$, essendo h la costante di Planck (*orbite quantiche,* o *stati quantici*). Si aggiunge poi che, finchè il moto avviene in una di queste orbite, l'elettrone non emette luce, sebbene la teoria elettromagnetica richieda che un elettrone accelerato emetta sempre radiazione: quindi, contraddizione con l'elettromagnetismo. Quando poi, per cause ignote, l'elettrone passa da un'orbita di energia E_1 a un'altra più interna di energia E_2, poichè dalla meccanica classica risulta che le orbite più interne hanno energia minore, esso deve perdere l'energia $E_1 - E_2$ che ha in più, e si ammette che la perda normalmente sotto forma di radiazione. Il meccanismo di questa radiazione è del tutto sconosciuto, ma si ammette, senza nessuna giustificazione a priori, che la frequenza ν della radiazione emessa sia

$$\nu = \frac{E_1 - E_2}{h}. \tag{1}$$

Questo esempio particolarissimo è sufficiente a mostrare alcune caratteristiche della teoria dei quanti: in particolare la sovrapposizione di leggi classiche e di postulati nuovi, e la contraddizione di taluni di questi postulati con talune di quelle leggi. Inoltre la « discontinuità » che caratterizza le leggi quantistiche — e che sembra assolutamente necessaria a render conto dei fatti — è introdotta, in modo assai poco soddisfacente, col postulato che certi numeri possano assumere soltanto valori interi. È naturale domandare una giustificazione di questo fatto singolare, ma la teoria dei quanti non

Digitized by Google

ne fornisce alcuna: essa si limita ad affermare che la natura « ha orrore dei numeri frazionari », così come un tempo gli aristotelici le attribuirono l'orrore del vuoto. Ma vi è di peggio, poichè si è stati costretti ad ammettere che la regola dei numeri interi patisca qualche eccezione e che in certi casi intervengano dei « mezzi quanti » al posto dei quanti interi. Perciò la teoria dei quanti è stata sempre considerata come un aggregato provvisorio di postulati e leggi non sempre coerenti tra loro, nè sempre dotati di una plausibile giustificazione; purtuttavia così fecondi di conseguenze, da contenere certamente un buon fondamento di verità.

Si è naturalmente cercato in più modi di ricondurre i postulati della teoria dei quanti, modificati se occorre, a pochi principi generali e coerenti, dai quali possano discendere anche, come caso particolare, le leggi dell'ordinaria meccanica. Attraverso ai ripetuti insuccessi di siffatti tentativi, si è generalmente maturata la convinzione che si richieda, per raggiungere lo scopo, una profondissima revisione non solo delle leggi, ma degli stessi *concetti* fondamentali della meccanica. In questi ultimi due anni sono stati fatti due tentativi in questo senso, che sono stati iniziati indipendentemente, e partendo da principi totalmente diversi; tuttavia si è riscontrato che conducono agli stessi risultati, e che probabilmente sono da considerarsi come due aspetti diversi della medesima teoria.

Il primo di questi tentativi è dovuto ad Heisemberg, ed è poi stato proseguito con successo da Born e Jordan, Dirac ed altri. Essi, rinunziando a fornire qualsiasi modello geometrico e meccanico dell'atomo, hanno trovato il modo di collegare le diverse grandezze che caratterizzano le radiazioni emesse da un atomo (frequenze, intensità etc.) direttamente tra loro, senza far intervenire elementi non direttamente osservabili, come sarebbero, nella teoria ordinaria, i vari elementi geometrici che caratterizzano il moto dell'elettrone nell'atomo (elementi dell'orbita, periodo delle rivoluzioni, fase etc.). I risultati che si raggiungono con questa teoria — che è stata chiamata *meccanica quantistica* — sono in buon accordo con l'esperienza, ma lo strumento matematico necessario a raggiungerli, cioè il calcolo delle matrici di infiniti elementi, è assai poco maneggevole, e in tutta la teoria,

Digitized by Google

mancando ogni rappresentazione modellistica, manca il soccorso e il suggerimento dell'intuizione.

Il secondo tentativo è stato fatto da Schrödinger, il quale, sviluppando e precisando certe idee suggerite da L.de Broglie, ha proposto una teoria che ha ricevuto il nome di « *meccanica ondulatoria* » della quale in questo articolo esporremo i concetti fondamentali. Essa conduce, come abbiamo detto, agli stessi risultati della meccanica quantistica, ma ha su quella il vantaggio di fornire un modello adatto a suggerire all'intuizione il procedimento più opportuno per risolvere i problemi, e talora anche il tipo di soluzione dei problemi stessi.

II. Analogie ottico-meccaniche.

Il punto di partenza della teoria di Schrödinger è suggerito dalla analogia, già da lungo tempo osservata, tra le leggi dell'ottica geometrica e quelle classiche della meccanica del punto materiale. Per mettere in evidenza questa analogia, pensiamo, per es., ad un proiettore capace di emettere un fascio cilindrico di luce, e immaginiamo di accenderlo per un tempo brevissimo, per es. 10^{-8} sec. In questo tempo la luce percorre 3 m., e quindi uscirà dal proiettore un cilindro di luce della lunghezza di 3 m., che si propagherà nello spazio senza alterazioni (supposto che non vi sia assorbimento). Avremo così realizzato un « gruppo d'onde » luminose, limitate ad una ristretta regione dello spazio, che potremo, per semplicità, assimilare ad un punto.

Se il mezzo nel quale il gruppo si propaga è omogeneo, il gruppo si muoverà di moto rettilineo uniforme, come un punto materiale non soggetto a forze. Se invece l'indice di rifrazione è variabile da punto a punto, il gruppo seguirà una traiettoria curvilinea determinata dal principio di Fermat, cioè dalla condizione che il tempo di percorso tra due punti qualunque sia minimo (o massimo), o, più precisamente,

$$\delta \int n ds = 0 . \tag{2}$$

Similmente, sappiamo dalla meccanica che la traiettoria di un punto materiale in un campo di forza di potenziale V

Digitized by Google

è determinata dal principio della minima azione, che si può esprimere con la condizione

$$\delta \int \sqrt{2(E - V)}\, ds = 0 \tag{3}$$

dove E è una costante (energia del punto). Infine, come la velocità v del punto materiale in ciascun punto della traiettoria è determinata in funzione di V dal teorema della forza viva, così anche la velocità del gruppo d'onde è in ciascun punto una funzione dell'indice di rifrazione n. Si può anzi, come vedremo, sostituire al campo di forze di potenziale V una distribuzione dell'indice di rifrazione tale, che il moto del gruppo d'onde si identifichi col moto del punto materiale.

Ora, Schrödinger ha osservato che l'analogia tra i due campi si completa anche in un altro curioso particolare. Supponiamo per un momento che un osservatore, che conosca perfettamente le leggi dell'ottica geometrica, ma ignori la natura ondulatoria della luce (che del resto da quelle leggi non sarebbe possibile indovinare), si trovi in presenza di un qualunque fenomeno di diffrazione: constati, per es., che un fascio di luce, dopo aver attraversato un foro sottile, non prosegue come un pennello rettilineo, ma si sparpaglia in tutte le direzioni. Questo fenomeno gli apparirà inesplicabile, e se vorrà ostinarsi a spiegarlo con le sue leggi ottiche, dovrà ricorrere alle più strane ipotesi sulle proprietà dei fori sottili (supporre per es. che siano ripieni di un mezzo rifrangente, etc.). La causa del suo disagio starà in ciò, che egli ignora che le leggi dell'ottica geometrica non sono che un caso limite di leggi più complesse, e che lo stesso concetto di raggio luminoso è soltanto una schematizzazione macroscopica del fenomeno ondulatorio che costituisce la luce, schematizzazione lecita quando si osservano i fenomeni, per così dire, in grande scala, nel qual caso non interviene la natura ondulatoria della luce, ma inapplicabili quando tra i dati del problema figurano lunghezze (diametro del foro) comparabili con la lunghezza d'onda.

Ora, in un disagio simile ci troviamo in meccanica. Anche qui le leggi dedotte dalla osservazione dei fenomeni macroscopici si dimostrano inadatte a spiegare il funzionamento di

Digitized by Google

meccanismi così piccoli come l'atomo, tanto che si è dovuto ricorrere alle più strane e contradditorie ipotesi. Potrebbe darsi, secondo Schrödinger, che la difficoltà fosse della stessa natura, che cioè i fenomeni meccanici fossero realmente di natura ondulatoria, e che le difficoltà incontrate nella meccanica atomica non fossero altro che il manifestarsi di fenomeni analoghi alla diffrazione, dovuti al fatto che le dimensioni atomiche sono comparabili con quella grandezza meccanica che corrisponderebbe alla lunghezza d'onda ottica.

Vediamo ora come si possa dar forma concreta a questo ordine di idee.

III. Lo scalare di campo e l'equazione fondamentale.

Secondo la nuova meccanica di De Broglie e Schrödinger tutto lo spazio è generalmente sede di fenomeni vibratori di una particolare natura: ciò che a noi appare come elettricità o materia non è che un aspetto di questi fenomeni, allo stesso modo come ciò che si manifesta come luce consiste in realtà in vibrazioni del campo elettrico e magnetico. E, come si può svolgere tutta l'ottica ondulatoria senza precisare la natura del « vettore luminoso », così noi attribuiremo queste speciali vibrazioni a una grandezza ψ, detta « scalare di campo », funzione del posto e del tempo, sulla cui natura fisica non facciamo nessuna ipotesi. La colleghiamo però alla realtà osservabile, ammettendo che il quadrato del suo modulo fornisca una misura della densità elettrica, così come il quadrato della ampiezza delle oscillazioni elettriche misura l'intensità della luce. Così, quando noi diciamo che un punto dello spazio, in un dato istante, è occupato da elettricità, ciò significa semplicemente che, in quel punto e in quell'istante, lo scalare di campo ψ è notevolmente diverso da zero.

Dicendo che il fenomeno caratterizzato dallo scalare ψ ha natura ondulatoria, intendiamo dire che ψ soddisfa l'equazione differenziale caratteristica delle vibrazioni luminose ed elastiche

$$\Delta_2\psi - n^2\frac{d^2\psi}{dt^2} = 0, \tag{4}$$

Digitized by Google

dove n è l'inversa della velocità di propagazione di una vibrazione (ossia della « velocità di fase ») ed è analogo a ciò che in ottica si chiama indice di rifrazione. Questa n sarà, naturalmente, una funzione del posto (oltrechè, in generale, della frequenza delle vibrazioni), e vogliamo collegarla al potenziale V delle forze in modo che il movimento di un « gruppo d'onde » dello scalare di campo avvenga proprio come il moto di una particella materiale.

Per ottener ciò, bisognerà anzitutto che la (2) si identifichi con la (3), e quindi n dovrà assumersi proporzionale a $\sqrt{2(E-V)}$:

$$n = K\sqrt{2(E-V)}. \tag{5}$$

Con ciò la *traiettoria* del gruppo di onde coincide con la traiettoria del punto materiale. La costante K (eventualmente funzione della frequenza) va poi determinata in modo che non solo le traiettorie coincidano, ma anche la velocità sia la stessa nei due casi. Per far ciò, notiamo che la velocità del punto materiale data dal teorema della forza viva è

$$v = \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{2(E-V)}. \tag{6}$$

D'altra parte, si dimostra nei trattati di ottica che la velocità di propagazione di un gruppo o « treno » di onde, in un mezzo dispersivo, cioè il cui indice di rifrazione n (1) è funzione della frequenza ν, è data da

$$\frac{1}{v} = \frac{d(n\nu)}{d\nu}. \tag{7}$$

(Si noti incidentalmente che, se il mezzo non è dispersivo, questa formula dà $v = \frac{1}{n}$, cioè la velocità del gruppo è uguale alla velocità di una singola onda; quando invece n, p. es., cresce con la frequenza, come accade nei mezzi dispersivi ordinari, la velocità del gruppo risulta minore, e ciò dipende

(1) Ciò che qui chiamiamo « indice di rifrazione » è l'indice ordinario diviso per c (velocità nel vuoto); esso è quindi uguale, e non soltanto proporzionale, all'inverso della velocità di fase.

Digitized by Google

dal fatto che, man mano che il gruppo si propaga, le onde che si trovano alla testa di esso si estinguono, mentre ne appaiono delle nuove in coda: così, mentre ciascuna onda del gruppo cammina con la velocità $\frac{1}{n}$, il gruppo nel suo complesso procede più lentamente).

Perchè dunque il moto del gruppo di onde possa identificarsi con quello del punto materiale, bisognerà che la v della (6) sia uguale alla v della (7), cioè che sia [tenendo presente la (5)]

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(E-V)}} = \frac{d}{d\nu}(K\nu\sqrt{2(E-V)}). \tag{8}$$

Notiamo ora, prima di andare innanzi, che non abbiamo ancora stabilito quale è la frequenza ν da attribuirsi alle onde rappesentanti il nostro punto materiale. È qui che si introduce uno dei postulati fondamentali della teoria, ammettendo che la frequenza ν sia legata all'energia E del punto materiale (legame che può essere suggerito, p. es., dal fatto che, sia la frequenza in ottica come l'energia in meccanica hanno carattere eminentemente conservativo), e il legame più ovvio, anche per ragioni di omogeneità, è dato dalla formula, assai nota in fisica

$$E = h\nu .$$

Notiamo che è in questo punto che fa il suo ingresso nella teoria la costante h di Planck.

Sostituendo per E questa espressione, l'equazione (8) si integra con una semplice quadratura, e si ottiene

$$\frac{\sqrt{m}}{h}\sqrt{2(h\nu - V)} + C = K\nu\sqrt{2(h\nu - V)}.$$

Ora, K non deve dipendere dal posto, e quindi deve risultare indipendente da V: dividendo l'equazione per il radicale, si vede che ciò può verificarsi solo se $C = 0$. Ne segue allora immediatamente $K = \frac{\sqrt{m}}{h\nu}$ e quindi, sostituendo nella (5),

$$n = \frac{\sqrt{m}}{h\nu}\sqrt{2(h\nu - V)}.$$

Digitized by Google

Sostituendo nella (4), e scrivendo di nuovo E come abbreviazione di $h\nu$, si ha

$$\Delta_2\psi - \frac{2m}{E^2}(E - V)\frac{d^2\psi}{dt^2} = 0. \tag{9}$$

Poichè ci limitiamo per ora a considerare le soluzioni semplici, cioè quelle in cui ψ è funzione sinusoidale del tempo (ed è noto che la soluzione più generale si può esprimere come somma di soluzioni semplici) potremo scrivere

$$\psi = U(x, y, z)e^{2\pi i\nu t}$$

e allora, sostituendo nella precedente, si trova che la funzione (soltanto del posto) U, rappresentante l'ampiezza delle oscillazioni, deve soddisfare l'equazione

$$\Delta_2 U + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)U = 0 \tag{9'}$$

che è fondamentale per la teoria.

Da questa equazione, con le opportune condizioni supplementari che verranno ora specificate, si ricava U e quindi ψ: di qui, come abbiamo detto, si ottiene la densità elettrica che è proporzionale a (mod. ψ)^2 cioè a $\psi\bar{\psi}$ (denotando $\bar{\psi}$ il coniugato di ψ) e da questo punto ci si ricollega alla teoria di Maxwell, che fornisce la radiazione emessa e le altre proprietà elettromagnetiche del sistema, in funzione della distribuzione delle cariche e del loro movimento.

Le condizioni supplementari vengono scelte da Schrödinger nel modo più semplice: si richiede cioè per la U (e quindi per la ψ) di mantenersi *finita, continua* e *ad un sol valore* in tutto lo spazio, e anche all'infinito. Come ora mostreremo su qualche esempio, questa ipotesi, arbitraria, ma naturalissima, è quella che dà origine all'esistenza di soluzioni discrete (stati quantici) e sostituisce quindi in modo sorprendente le vecchie condizioni di quantizzazione.

IV. Esempi.

a) Punto scorrevole lungo una retta, senza forze.

In tal caso, naturalmente, non avremo da aspettarci condizioni di quantizzazione. Assumendo la retta come asse x, e

Digitized by Google

facendo $V = 0$, l'equazione (9') si scrive

$$\frac{d^2U}{d^2x} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} EU = 0 \tag{10}$$

di cui si ha subito l'integrale generale

$$U = B_1 \cos \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\, x + B_2 \sin \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\, x \tag{11}$$

che rappresenta onde stazionarie analoghe a quelle di una corda che vibri con la stessa fase dappertutto, ma con una ampiezza U funzione sinusoidale di x. È noto che tale soluzione si può considerare come la sovrapposizione di due sistemi di onde procedenti in senso inverso: basta porre U sotto la forma esponenziale

$$U = C_1 e^{\frac{2\pi i}{h}\sqrt{2mE}\, x} + C_2 e^{-\frac{2\pi i}{h}\sqrt{2mE}\, x} \tag{11'}$$

e quindi ψ sotto la forma

$$\psi = C_1 e^{2\pi i \nu\left(t + \sqrt{\frac{2m}{E}}\, x\right)} + C_2 e^{2\pi i \nu\left(t - \sqrt{\frac{2m}{E}}\, x\right)} \tag{11''}$$

Si vede allora che la velocità di propagazione dei due sistemi di onde è $\sqrt{\frac{E}{2m}}$ e quindi la lunghezza d'onda è $\lambda = \frac{vel.}{\nu} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$

La ν risulta analiticamente del tutto indeterminata; perciò sono possibili oscillazioni di qualunque frequenza, e sarà anche possibile la sovrapposizione di quante si vogliono soluzioni del tipo (11''). Consideriamo in particolare la soluzione ottenuta sovrapponendo onde di tutte le frequenze comprese in un intervallo ristretto, ma finito, intorno a una frequenza media ν_0 (cioè, per usare il linguaggio spettroscopico, un breve tratto di spettro continuo, o una riga allargata). Se supponiamo che in un punto O esse siano tutte in fase, allontanandoci anche di poco da O le diverse onde si troveranno in fasi tutte differenti, e a breve distanza da O esse praticamente si distruggeranno per interferenza. Avremo così realizzato intorno ad O un treno d'onde limitato, che si muoverà con la velocità v già calcolata, e che si manifesterà come una

Digitized by Google

particella di elettricità. La sua energia cinetica E sarà uguale ad $h\nu_0$. Il caso più generale, della frequenza unica, e della sovrapposizione di frequenze comunque distribuite, non corrisponde ad alcuna realtà sperimentalmente riconosciuta.

b) Rotatore.

Supponiamo ora che il punto, sempre non soggetto a forze, possa scorrere non lungo una retta indefinita, ma lungo una circonferenza di raggio r. In tal caso varrà ancora l'equazione (10), dove $x = r\varphi$ rappresenterà l'arco di circonferenza (a partire da un'origine arbitraria). La soluzione semplice si potrà ancora mettere sotto la forma (11″), cioè rappresenterà delle onde percorrenti la circonferenza in un verso o nell'altro, ma, perchè la U risulti a un sol valore, la lunghezza d'onda λ dovrà essere un sottomultiplo esatto della circonferenza, quindi

$$2\pi r = n\frac{h}{\sqrt{2mE}} \qquad (n = 0, 1, 2\ldots)$$

da cui si vede che E non potrà avere valori qualunque, ma soltanto i valori dati da

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8\pi^2r^2m}. \tag{12}$$

Ciò significa, dal punto di vista ondulatorio, che sono possibili soltanto certe frequenze discrete, date da $\frac{E_n}{h}$ (e ciò è perfettamente analogo al caso acustico di una corda, che può vibrare soltanto con certe frequenze caratteristiche), mentre, dal punto di vista meccanico, significa che l'energia del sistema può assumere solo certi valori discreti dati da (12). Ora se si applica al sistema di un punto scorrevole lungo una circonferenza il postulato di Sommerfeld

$$\int pdq = nh \qquad (n = 0, 1, 2\ldots)$$

(che in tal caso esprime semplicemente che il momento della quantità di moto mrv deve essere multiplo intero di $\frac{h}{2\pi}$) si giunge proprio alla condizione (12).

Digitized by Google

Per farci un'immagine del rotatore dal punto di vista della meccanica ondulatoria, consideriamo dapprima le soluzioni corrispondenti ad n molto grande: ciascuna di esse corrisponderà a un sistema di onde numerosissime che si rincorrono lungo la circonferenza. Analogamente a quanto abbiamo fatto nell'esempio precedente, noi potremo sovrapporre un gran numero di sistemi siffatti, corrispondenti a valori di n tutti grandissimi e assai vicini tra loro (p. es. tutti i valori interi da 999.000 a 1.001.000). Potremo allora ragionare come nell'esempio precedente, perchè, sebbene qui le frequenze sovrapposte non formino un tratto di spettro continuo, pure, dato il grande valore di n, le frequenze corrispondenti a due valori successivi di n avranno tra loro una differenza relativa assai piccola. Quindi, se tali sistemi di onde sono tutti in fase in un punto, nei punti anche poco distanti da quello si distruggeranno per interferenza: avremo così realizzato un punto materiale scorrevole lungo la circonferenza. L'energia del punto sarà data dalla (12), dove per n dovrà porsi un valore medio: si trova poi, naturalmente, che la velocità del gruppo è proprio quella del punto della meccanica classica.

Tutto ciò è possibile, però, solo se n è grande, cioè se r è grande, rispetto alla lunghezza d'onda λ; se invece supponiamo trattarsi di un raggio piccolo rispetto a questa lunghezza, e quindi supponiamo che lungo la circonferenza vi siano soltanto poche onde, non potremo più far sì che queste interferiscano dovunque, eccetto un punto della circonferenza, e non potremo quindi più realizzare il punto materiale. Avremo invece uno o più sistemi di onde percorrenti il cerchio, e la carica elettrica non sarà più localizzata in un punto, ma distribuita in modo più e meno complicato lungo il cerchio, e varierà in generale col tempo. È questo il caso del rotatore di dimensioni atomiche, il cui interesse fisico deriva dal fatto, che si può considerare come una schematizzazione della molecola rigida rotante.

Quando è presente una sola frequenza, il sistema è in uno « stato quantico ». Come si vede, nella teoria di Schrödinger, al contrario di quella di Bohr, il sistema può trovarsi contemporaneamente in più stati quantici; anzi, quando il sistema ha dimensioni rilevanti, e si materializza in un punto materiale, ciò avviene, come abbiamo visto, per la simultanea presenza

Digitized by Google

di molti stati quantici di ordine elevato. Vedremo tra breve l'importanza di questo fatto nei riguardi della emissione di radiazione.

c) L'atomo di idrogeno.

Considerando il nucleo come fisso, si ha un sistema con tre gradi di libertà. Il potenziale V è $-\frac{e^2}{r}$ (chiamando e la carica dell'elettrone) e quindi l'equazione (9′) si scrive, esplicitando il Δ_2 in coordinate polari,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - \frac{e^2}{r}\right)U = 0$$

Ricerchiamo una soluzione del tipo $U(r, \theta, \varphi) = f(r)\, Y(\theta, \varphi)$; con ciò l'equazione precedente, divisa per fY e moltiplicata per r^2, diviene

$$\frac{r}{f}\frac{d^2}{dr^2}(rf) + \frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \\ + \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(Er^2 - e^2 r) = 0$$

Le variabili sono ivi separate, poichè il primo e l'ultimo termine dipendono solo da r, gli altri solo da θ e φ: quindi l'equazione si spezza nelle due

$$\frac{r}{f}\frac{d^2}{dr^2}(rf) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(Er^2 - e^2 r) = a$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + aY = 0$$

dove a è una costante.

La seconda di queste è un'equazione assai nota, che ha soluzioni uniformi soltanto quando a è della forma $n(n+1)$, dove n è un numero intero: in tal caso l'equazione è quella caratteristica delle funzioni *sferiche* d'ordine n, e la Y è quindi

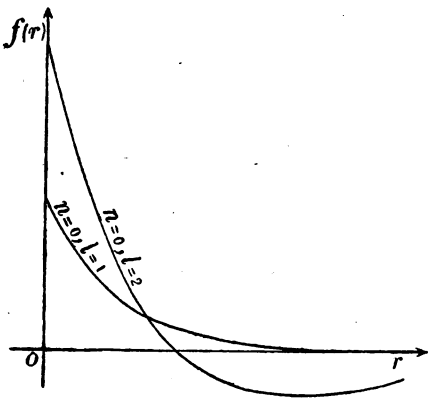
Digitized by Google

appunto una di tali funzioni. Sostituendo poi $n(n+1)$ per a nella prima, si ottiene un'equazione la cui discussione porta alle seguenti conclusioni. Se $E > 0$, l'equazione ammette sempre soluzioni regolari. Se $E < 0$, essa ammette soluzioni regolari soltanto quando E ha uno dei valori dati da

$$E = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 l^2} \tag{13}$$

dove l è un numero intero, maggiore di n.

Confrontiamo questi risultati con quelli della teoria di Bohr-Sommerfeld. Secondo quest'ultima, le orbite iperboliche ($E > 0$) non sono quantizzate, e possono quindi avere qualunque energia: per quelle ellittiche o circolari ($E < 0$) l'energia può avere soltanto valori discreti, dati da una formula identica alla (13), nella quale l'intero l è il « quanto totale » (somma dei due numeri quantici azimutale e radiale). Si vede dunque che vi è perfetta identità tra i risultati delle due teorie, nei riguardi dei valori ammessi per E. Il numero quantico azimutale di Bohr corrisponde al nostro $n+1$, mentre il numero quantico radiale (che si annulla per orbite circolari) corrisponde a $l - n - 1$.



È invece assai diverso il modello nelle due teorie. Secondo Schrödinger, si deve abbandonare, in generale, l'immagine dell'elettrone percorrente una determinata orbita, e pensare invece il nucleo circondato da un campo di vibrazioni, che si estendono teoricamente a tutto lo spazio, ma praticamente a una regione ristretta (cioè allo spazio che consideriamo occupato dall'atomo) con la stessa fase dovunque, ma con ampiezza diversa nei diversi punti. P. es., nello stato caratterizzato da $n = 0$, $l = 1$ (che corrisponde alla prima orbita circolare di Bohr) tutto il fenomeno ha simmetria sferica (poichè la funzione sferica di ordine zero è costante) e la

Digitized by Google

distribuzione dell'ampiezza in funzione del raggio è rappresentata dalla curva $l=1$ della figura. Per $n=0$, $l=2$ si ha ancora simmetria sferica, con la distribuzione data dalla curva $l=2$; vi è quindi una « sfera nodale » in cui l'ampiezza è nulla; in generale, vi sono $l-n-1$ sfere nodali. Se $n>0$ naturalmente non vi è più simmetria sferica.

Anche quì, come nel caso precedente, possono essere presenti simultaneamente più stati quantici, e se questi sono abbastanza numerosi, e tutti di ordine molto elevato, possono dar luogo a un'effettiva particella (elettrone) percorrente un'orbita secondo il modello di Bohr.

V. L'emissione.

Vediamo ora come un sistema siffatto si comporti nei riguardi dell'emissione di radiazione elettromagnetica. Come abbiamo già detto, i fenomeni elettrici generati dall'atomo si calcolano con le ordinarie leggi elettromagnetiche, partendo da un valore della densità elettrica proporzionale in ogni punto a $\psi\bar{\psi}$. Finchè è presente un solo stato di vibrazione, cioè ψ è del tipo $Ue^{2\pi i\nu t}$, è evidente che $\psi\bar{\psi}=U^2$, e quindi la densità elettrica è dappertutto indipendente da t: si è dunque in un caso di *elettrostatica*, e *non* vi è radiazione. Questo stato corrisponde a ciò che Bohr chiama stato stazionario (o quantico). L'assenza di radiazione è così giustificata, senza contraddizione con i principi dell'elettromagnetismo, anzi in accordo con questi, poichè lo stato stazionario è concepito non come un movimento privilegiato, ma come l'assenza di ogni movimento di cariche.

Supponiamo invece che siano sovrapposti nell'atomo due stati vibratori di frequenze ν_1 e ν_2 cioè che ψ sia del tipo

$$\psi = U_1 e^{2\pi i\nu_1 t} + U_2 e^{2\pi i\nu_2 t}.$$

Allora si ha, manifestamente,

$$\psi\bar{\psi} = U_1^2 + U_2^2 + U_1U_2(e^{2\pi i(\nu_1-\nu_2)t} + e^{-2\pi i(\nu_1-\nu_2)t}) =$$
$$= U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos 2\pi(\nu_1-\nu_1)t$$

Digitized by Google

e quindi la densità elettrica *pulsa* in ciascun punto con una frequenza $\nu_1 - \nu_2 = \frac{E_1 - E_2}{h}$; nascono perciò onde elettromagnetiche di questa frequenza, che ha proprio il valore che sperimentalmente si osserva. Così la formula (1), invece di esser postulata a priori, viene dedotta in modo naturale dalla teoria, ed esprime un fenomeno analogo a quello dei battimenti acustici, che sono dovuti, come è noto, alla sovrapposizione di vibrazioni di diverso periodo, e la cui frequenza è appunto uguale alla differenza delle frequenze di tali vibrazioni.

VI. Sistemi più generali.

Dopo aver dato un'idea della teoria attraverso a questi casi particolari, accenneremo ora fugacemente all'aspetto più generale di essa.

Consideriamo un sistema meccanico ad f gradi di libertà, e poniamoci per ora dal punto di vista classico. Se riguardiamo le f coordinate (generali) di esso come coordinate in uno spazio ad f dimensioni, la configurazione del sistema in un dato istante sarà caratterizzata, come è noto, da un punto di tale spazio (il quale perciò si chiama «spazio delle configurazioni»), e il moto del sistema sarà caratterizzato dal moto di questo unico punto rappresentativo nello spazio f — dimensionale. La metrica di tale spazio può naturalmente essere qualunque, agli effetti di tale rappresentazione, ma è opportuno definirla in modo che la forza viva del sistema si identifichi formalmente con la forza viva del punto rappresentativo, supposto di massa 1. Perciò, se l'espressione della forza viva del sistema è

$$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{f}{}_{ik} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

prenderemo come elemento lineare dello spazio delle configurazioni la forma quadratica

$$ds^2 = \sum_{1}^{f}{}_{ik} a_{ki}(q) dq_i dq_k \tag{14}$$

Digitized by Google

così da avere appunto

$$T = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2}v^2 \tag{15}$$

chiamando v la velocità con cui si muove il punto rappresentativo.

Secondo Schrödinger, ad ogni sistema corrisponde un determinato spazio delle configurazioni, cui si può dare, per convenzione, la metrica (14): però non si può parlare, in generale, del punto rappresentativo del sistema in un dato istante. In luogo di esso, si introduce lo scalare di campo ψ definito in ogni punto dello spazio delle configurazioni (e variabile col tempo): quando avviene che questo scalare abbia valore praticamente nullo dovunque, eccetto in una regione ristrettissima, quasi puntiforme, allora questa regione si può identificare col punto rappresentativo classico. Quando ciò non avviene, e ψ ha un valore generalmente diverso da zero in tutto lo spazio delle configurazioni, non ha senso parlare della configurazione del sistema in un dato istante: si può dire, in forma un po' paradossale, che il sistema si trova *contemporaneamente* in *tutte* le configurazioni possibili, ma in alcune più, in altre meno, e precisamente, si trova di più in quelle configurazioni che corrispondono, nello spazio f-dimensionale, ai punti in cui è più grande mod. ψ.

Lo scalare ψ soddisfa all'equazione differenziale seguente, che è una generalizzazione della (9), (in $f+1$ variabili):

$$\Delta_2\psi - \frac{2}{E^2}(E-V)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{16}$$

dove il Δ_2 va riferito all'elemento lineare (14). Tale equazione rappresenta, come è noto, una propagazione di onde nello spazio delle configurazioni con velocità (di fase)

$$u = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}}.$$

Se si suppone $E = h\nu$, un gruppo di onde siffatte si propagherà con la velocità (data dalla (7) e dalla precedente

Digitized by Google

espressione di u).

$$v = \sqrt{2(E - V)}$$

e perciò, identificando E con l'energia totale e V con l'energia potenziale, quindi $E - V$ con la forza viva T, si avrà $v = \sqrt{2T}$ come dalla (15): quindi la velocità del gruppo si identifica con la velocità del punto rappresentativo nel caso classico.

Si potrebbe poi facilmente dimostrare che, anche in questo caso più generale, il principio di Fermat, applicato alle onde nello spazio delle configurazioni, si identifica col principio meccanico di Maupertuis. Vale a dire, dall'equazione (16) segue che un gruppo d'onde in tale spazio si muove proprio come il punto rappresentativo di un sistema meccanico ordinario: è quindi lecito considerare questo punto (quando esiste, cioè quando vale la meccanica classica) come caso limite di un gruppo d'onde assai circoscritto. In altre parole, si fa per il punto rappresentativo ciò che abbiamo fatto nei paragrafi precedenti per il punto materiale nello spazio ordinario.

La ψ sarà in generale la sovrapposizione di termini di diversa frequenza, ciascuno del tipo $\psi = Ue^{2\pi i\nu t}$ dove U è una funzione solo del posto, cioè delle f coordinate: la U soddisferà l'equazione

$$\Delta_2 U + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)U = 0 \tag{16'}$$

che si ricava subito dalla (16). Tale equazione in generale ammette soluzioni finite continue ed uniformi (non identicamente nulle) soltanto per certi valori del parametro E (« *autovalori* », o « *valori parametrici* ») e quindi, postulato che ψ debba essere sempre regolare, sono possibili solo certe determinate frequenze. Si estende così ai sistemi più complicati ciò che abbiamo visto per tre gradi di libertà, e si giunge anche in questo caso a giustificare gli stati quantici di Sommerfeld-Bohr.

Digitized by Google

VII. Conclusione.

La meccanica ondulatoria, considerando i fenomeni meccanici da un punto di vista del tutto nuovo, permette di dedurre da un unico principio, e senza contraddizioni, i postulati della teoria dei quanti, e, come caso limite per sistemi di dimensioni rilevanti, le leggi della meccanica ordinaria. È stato anzi dimostrato in generale che i risultati di questa teoria coincidono sempre, almeno in prima approssimazione, con quelli della teoria quantistica ordinaria: quando vi è divergenza, sembra che l'esperienza sia più favorevole alla nuova teoria. Questa ha poi il vantaggio, che la discontinuità non viene introdotta artificialmente, ma discende in modo del tutto naturale dalla equazione fondamentale e dal postulato di regolarità della ψ: precisamente, i diversi stati quantici corrispondono ai diversi « autovalori » dell'equazione differenziale del secondo ordine che regge la propagazione delle onde. Infine, aggiungeremo che si sono ottenuti con questa teoria dei risultati quantitativamente precisi in certi casi in cui la vecchia teoria dei quanti forniva soltanto alcune vaghe indicazioni basate sul principio di corrispondenza.

Sembra dunque che con la meccanica ondulatoria si sia veramente trovata la via per l'organizzazione sistematica della meccanica atomica, e se pure tale teoria sarà destinata a trasformazioni profonde, è giustificata la speranza che il punto di vista genialmente suggerito da Schrödinger sia molto vicino alla vera natura delle cose.

R. Istituto Fisico, Roma.

ENRICO PERSICO

Digitized by Google

Exposé historique du problème des quatre couleurs

1. "A-t-on donné une solution à l'affirmation qu'en coloriant la carte d'un pays divisé en comtés, quatre couleurs distinctes seulement sont nécessaires, de façon que pas deux comtés adjacents ne soient peints de la même couleur?,,

Telle est la question que Cayley (1) posait à la Société mathématique de Londres, le 13 juin 1878, et sur laquelle il est revenu un peu plus tard, pour en souligner les difficultés (2)

2. Lorsque la Direction du Periodico di Matematiche nous a fait l'honneur de nous demander un court exposé historique de ce problème, nous avons, un peu à la légère, accepté son aimable invitation, sans avoir assez présente à l'esprit l'excellente notice que M. Brahana (3) y consacrait voici peu d'années.

Nous-même, dans notre thèse (4), avons déjà indiqué ce que nous savions de l'origine de la question; et l'on verra qu'en somme il n'y a pas grand-chose de neuf à en dire.

Mais comme il ne semble pas que les géomètres italiens aient fourni autant d'efforts que leurs confrères d'autres pays pour ce problème curieux et difficile, qu'il nous soit permis une fois encore de faire connaître de quoi il s'agit, avec

---

(1) CAYLEY, *Proc. Math. Soc.*, IX, p. 148, Londres, 1878.

(2) — *Proc. R. Geogr. Soc.*, NS I, p. 259-261, Londres, 1879.

— Voir aussi *Collected Papers*, XI, n.° 707, p. 7, Cambridge, 1889.

— DEHN, Voir *Encykl.*

(3) — *Am. Math*, Monthly, XXX, 5, p. 234-243, juillet-août 1923.

(4) ERRERA, *Du Coloriage des Cartes*, thèse, FALK fils, Bruxelles et GAUTHIER-VILLARS, Paris, 1921.

Digitized by Google

l'espoir que l'un d'entre eux sera plus habile et plus heureux qu'on ne l'a été jusqu'ici.

3. Afin de nous entendre sur les termes employés, nous conviendrons de ne considérer comme éléments de lignes, que des courbes continues simples ouvertes, que nous appellerons des *arêtes;* une succession simple d'arêtes formera un *alignement* ou un *cycle,* suivant qu'elle sera ouverte ou fermée.

Si l'on prend dans l'espace, et en particulier sur une surface bilatère, un nombre fini s de points (deux au moins), les *sommets,* et qu'on les relie deux à deux de façon quelconque par un nombre fini a d'arêtes (une au moins), sans autres points communs que les sommets, l'on aura déterminé un *réseau* ou *graphe;* celui-ci sera *connexe,* si chaque sommet appartient à quelque arête, et si deux arêtes quelconques appartiennent à quelque alignement.

Une arête est *libre,* si l'une de ses extrémités n'appartient à aucune autre arête du réseau; on l'appelle aussi avec Lucas une *impasse* (1).

Lorsque le réseau est formé de deux réseaux reliés par une seule arête, celle-ci se nomme (ibid.) chemin isolant ou *isthme.* C'est une arête non libre qui n'appartient à aucun cycle; supprimer un isthme rend le réseau non connexe.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons, sauf indications contraires, que notre réseau est connexe, sans arêtes libres, sans isthmes et tracé sur une sphère. Celle-ci pourrait elle-même être déformée en un plan, ou en un ellipsoïde, ou en un cube, ou en un *bloc* quelconque de genre zéro. Ainsi spécialisé, le réseau en divise la surface en un nombre fini f de régions, les *faces,* chaque arête séparant deux faces et reliant deux sommets. Deux faces sont *adjacentes,* si elles ont au moins une arête commune.

Les sommets, les arêtes et les faces déterminent ce que l'on appelle un *polyèdre de genre zéro,* ou encore une *carte géographique sphérique* (2), c'est-à-dire tracée sur la sphère.

---

(1) LUCAS, *Recréations mathématiques,* t. I et IV passim, Paris, 1891 et 1894.

(2) *Mémorial des Sc. math.,* XVIII, *Les Réseaux,* par Sainte-Laguë, GAUTHIER-VILLARS, Paris, 1926.

Digitized by Google

L'on ne s'étonnera pas de voir appeler polyèdre, une configuration ayant des arêtes aussi courbes et des faces aussi gauches, si l'on veut bien ne songer qu'à la situation et à la connexion des différentes parties de la figure; leur forme ne fait rien à l'affaire.

Le nom de carte géographique provient naturellement de l'analogie avec les cartes terrestres, réduites aux limites des pays, provinces et autres divisions territoriales. Cependant, nos cartes sont plus simples que celles qui sont nées des vicissitudes de l'Histoire, puisqu'elles ne pourraient contenir comme faces, ni l'Italie, ni la Belgique: en effet, l'Italie est une région connexe dont la frontière ne l'est pas, à cause de la République de St-Marin; et les lecteurs du Periodico ignorent peut-être que la Belgique forme une région non connexe, puisque le village belge de Baerle-Duc est enclavé dans le territoire hollandais, à la grande joie des contrebandiers.

L'étude de telles configurations fait partie de ce qu'on appelle l'*analysis situs* ou *topologie,* la géométrie de l'ivrogne, comme disait quelqu'un, dans laquelle on considère les propriétés qui ne changent pas si l'on déforme les figures d'une manière continue, c'est-à-dire sans les déchirer ni amener en contact des points qui étaient séparés.

4. C'est Euler (1) qui, le premier, les a étudiées systématiquement. La solution du célèbre problème des ponts de Königsberg équivaut à la condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau, dont la seule spécialisation soit d'être connexe, puisse être tracé d'un trait de plume, sans omission ni répétition.

C'est encore à l'illustre géomètre de Bâle que revient la découverte consciente du théorème fondamental que Descartes (2) avait démontré plus d'un siècle auparavant, mais sans l'énoncer explicitement, ainsi que M. Lebesgue (3) l'a fort bien exposé. Ce théorème concerne le nombre des som-

---

(1) Euler, *Novi Comm. Petr.*, p. 14-17 et 109-140, St-Petersbourg, 1752.

(2) Descartes, *Oeuvres inédites*, II, p. 214, Paris, 1860.
— Voir aussi, *Oeuvres*, t. X, p. 257-276, Tannery et Adam, Paris, 1908.

(3) Lebesgue, *Bull. Soc. math. Fr.*, LII, II, p. 315-336, Paris, 1924.

Digitized by Google

mets, des arêtes et des faces d'un polyèdre de genre zéro; et l'on sait bien, n'est-ce pas, que l'égalité $f + s = a + 2$ ne demande, ni dans son énoncé, ni dans plusieurs de ses démonstrations, que les arêtes soient droites et les faces, planes. D'ailleurs, pour les lecteurs du Periodico (1), il est inutile d'insister sur des choses aussi connues.

A côté des propositions faciles à démontrer, comme celles auxquelles nous venons de faire allusion, il en est d'autres dont l'objet n'est pas moins simple et que cependant nul, jusqu'ici, n'a pu établir. La plus célèbre s'appelle communément *théorème des quatre couleurs,* bien qu'une proposition indémontrée et peut-être fausse, ne mérite guère le nom de théorème.

5. Considérons donc sur une sphère, une carte géographique au sens que nous avons défini. La *colorier,* c'est en doter chaque face d'une couleur ou indice, et cela sans *collision,* c'est-à-dire sans que deux faces adjacentes aient la même couleur; mais il est entendu qu'elles peuvent avoir la même couleur, si elles n'ont en commun que des sommets, tels des secteurs non adjacents d'un cercle.

Nous proposerons donc comme suit ce problème: *Toute carte sphérique peut-elle être coloriée en quatre couleurs ?*

Cet énoncé est apparemment à la portée des enfants, comme l'est, par exemple, celui des théorèmes de Fermat ou de Goldbach; et peut-être, mais c'est bien improbable, qu'on en trouvera un jour une démonstration, en vérité, enfantine.

6. Sur sa genèse, que M. Brahana (loc. cit.) nous permette de traduire les quelques lignes par lesquelles débute son article:

« De l'origine du problème A. B. Kempe (2) dit en 1879:
« " Le professeur De Morgan a affirmé quelque part que les
« cartographes savent depuis longtemps comme un fait d'ex-
« périence — mais une expérience réduite sans doute à des
« cas relativement simples — que quatre couleurs seront suf-
« fisantes dans toutes les hypothèses..... Cet énoncé était-il

(1) Maroni, *Per. di Mat.*, IV, I, 5, p. 337-346, Bologne, novembre 1921.
(2) Kempe, *Amer. J. Math.*, II, 3, p. 193-200, Baltimore, 1879. — *Nature*, XXI, p. 399-400, Londres, 26 février 1880.

Digitized by Google

« simplement celui d'une croyance, ou bien le professeur De « Morgan ou quelque autre a-t-il jamais donné, soit une preuve « de cela, soit un moyen de colorier toute carte proposée, je « pense qu'on n'en sait rien; en tous cas, aucune réponse « n'a été fournie à la question qu'à cet effet le professeur « Cayley a posée à la Société mathématique de Londres, le « 13 juin 1878" (voir § 1). Une référence ultérieure concer- « nant une date antérieure est faite par Guthrie (1), qui « dit: "Il y a quelques trente ans.... mon frère", qui avait « assisté au cours de De Morgan, "me montra le fait que le « plus grand nombre de couleurs nécessaires.... est quatre". « De Morgan était content de ce résultat et avait accoutumé « de rendre justice, devant son auditoire, à sa source d'infor- « mation. Cependant la démonstration de son frère "ne pa- « raissait pas complètement satisfaisante à ce dernier" ».

7. Nous avons écrit à M. P. J. Heawood, qui fut mêlé dès le début aux tentatives de démonstration, et qui trouva des résultats remarquables dont nous parlerons plus loin; il nous autorise, et nous l'en remercions, à donner un extrait de sa réponse du 23-4-26 à diverses questions:

« Je ne sais rien de l'origine de ce problème, ni d'aucune « allusion imprimée avant Cayley. J'imagine que c'était un « objet de curiosité chez les praticiens de la cartographie, « avant d'éveiller quelque intérêt théorique ou philosophique. « Je n'ai pas rencontré d'autre référence que l'allusion de « Kempe, à la mention du sujet par De Morgan. Je n'ai « nulle connaissance du fondement de l'affirmation de Fré- « déric Guthrie, que son frère avait prouvé le théorème « vers 1850 »....

« Quand j'allai comme étudiant à Oxford en 1880, H. J. « S. Smith Savilian était professeur de géométrie. Conférencier « des plus clairs et intéressants, avant de procéder au sujet « propre de son cours, il commençait par diviser les propriétés « géométriques en: 1°) propriétés de situation, 2°) propriétés « descriptives, 3°) propriétés métriques; et parmi deux ou « trois exemples du 1°), il citait le théorème des quatre cou-

(1) GUTHRIE, *Proc. R. Soc.*, X, p. 727-728, Edimbourg, 1880.

Digitized by Google

« leurs comme probablement vrai mais indémontré; et depuis, « ce problème m'a toujours fasciné. Je me tournai donc natu- « rellement, quand j'en entendis parler, vers la soi-disant « démonstration de Kempe; et après un examen critique, j'y « découvris le vice que j'indiquai dans ma note imprimée. Je « n'ai jamais entendu soulever de doute quant à sa validité, « avant ma publication dans le " Quarterly Journal " ».

8. Kempe donna de sa pseudo-démonstration des variantes qui furent reproduites plus d'une fois. Elles reposent sur une idée importante, celle des *chaines de Kempe.*

Supposons une carte correctement coloriée en un certain nombre de couleurs, au moins quatre, par exemple, blanc, noir, rouge, vert, etc..... (*b, n, r, v,....*); et considérons le système formé d'une région *b,* de toutes les régions *n* qui lui sont adjacentes, de toutes les régions *b* adjacentes à celles-ci, et ainsi de suite aussi loin que possible. Nous aurons mis en évidence une chaine *bn* de Kempe, c'est-à-dire un système connexe de régions *b* ou *n,* système ne touchant qu'à des régions qui ne sont ni *b* ni *n*; cette chaine pourrait avoir, par exemple, la forme d'un anneau *bn* serré entre deux anneaux *rv.*

Dans une ou plusieurs chaines *bn,* il est clair que l'on peut *transposer* les couleurs *b* et *n,* c'est-à-dire les permuter, sans nuire au coloriage de la carte; mais on ne pourrait pas le faire dans une partie seulement d'une chaine.

Or, le nouveau coloriage sera essentiellement distinct de l'ancien, si l'on a transposé les couleurs *b, n* dans certaines chaines, mais non pas dans toutes.

En partant d'un coloriage, on obtient, par toutes le stranspositions possibles, effectuées successivement dans les différentes chaines, un groupe de coloriages, que nous avons appelé *groupe de Kempe,* et nous avons démontré qu'une carte peut être susceptible de deux coloriages n'appartenant pas au même groupe, c'est-à-dire sans qu'on puisse passer de l'un à l'autre par des transpositions.

Le criterium qui permet de voir si deux coloriages sont essentiellement différents, sera celui-ci: qu'il existe deux faces ayant la même couleur dans l'un et des couleurs différentes dans l'autre.

Digitized by Google

9. La méthode de Kempe consistait à chercher des *réductions,* c'est-à-dire des dispositions de sommets, d'arêtes et de faces permettant de ramener le coloriage d'une carte à celui d'une autre, ayant moins de faces; si toute carte contenait une telle combinaison, le théorème des quatre couleurs serait évidemment démontré.

Autrement dit, on fait un raisonnement par induction: appelons carte *minima* (M. Franklin [1] dit carte *irréductible,* mais cette dénomination pourrait faire penser qu'une carte n'est pas toujours réductible ou irréductible, ce qui serait une exception au principe du tiers exclu!) une carte M, s'il en existe, qui ne soit pas coloriable en quatre couleurs, mais telle que toute carte ayant moins de faces, le soit; alors elle ne peut contenir de configuration réductible; et on aura prouvé la proposition, si on établit qu'une carte quelconque contient une telle configuration. L'on voit, d'après cette manière de poser la question, que le raisonnement est arithmétique plutôt que géométrique.

Notre but n'étant pas d'étudier en lui-même le problème des quatre couleurs, nous n'allons pas répéter ici la démonstration de toutes les réductions que l'on connaît; à titre d'exemple nous en établirons deux, que Kempe a données tout au début et qui sont fondamentales; nous nous contenterons d'énumérer les autres.

10. *Une carte minima* M *ne contient pas de sommet auquel aboutissent plus de trois arêtes;* en peu de mots, voici pourquoi.

Si en un sommet S aboutissent plus de trois arêtes, alors il y a au moins deux faces F' et F'' possédant ce sommet, et qui n'ont aucune arête commune (issue ou non de S); il est clair que F' et F'' pourront recevoir la même couleur. Or il suffit de modifier M très légèrement aux environs de S, pour que F' et F'' ne forment plus qu'une seule face; les arêtes qui arrivaient en S, aboutissent maintenant en deux points S' et S'', séparés l'un de l'autre. La nouvelle carte ayant une face de moins que la carte minima, peut être

---

(1) FRANKLIN, *The four color problem,* thèse, Am. J. Math, XLIV, 3, p. 225-236, Baltimore, juillet 1922.

Digitized by Google

supposée coloriée; et l'on en transportera le coloriage sur M sans rien y changer, ce qui contredit à la définition des cartes minima.

Nous ne parlerons donc plus, dorénavant, que de cartes et de polyèdres ayant leurs sommets *trièdres* ou du *troisième degré*, le degré d'un sommet étant le nombre des arêtes qui en sortent.

11. *Une carte minima* M *ne contient pas de face ayant moins de cinq côtés.*

Autrement, comme, par la suppression d'une arête convenablement choisie et parce que M est minima, on peut supposer que toutes les faces, sauf l'une quelconque F, ont été coloriées, alors si F était entourée de trois couleurs au plus, M serait coloriable, contrairement à sa définition; tel serait le cas, si M contenait une face de moins de quatre côtés.

Supposons maintenant qui F soit un quadrilatère, entouré de quatre couleurs; alors nous pouvons supposer que les faces adjacentes F', F'', F''' et F'''' porteraient les couleurs b, n, r, v, respectivement.

Or de deux choses l'une: ou bien F' et F''' appartiendraient à la même chaine br, ou bien F'' et F'''', à la même chaine nv. Dans le premier cas, F'' et F'''', appartenant à deux chaines nv différentes, il suffirait de transposer n et v dans l'une, pour économiser une couleur autour du quadrilatère, ce qui permettrait de colorier celui-ci; dans l'autre cas, on opérerait ainsi sur br. Et chaque fois, M serait colorié, ce qui ne peut pas être, *c. q. f. d.*

12. Kempe a cherché à généraliser ce raisonnement au cas des pentagones. S'il avait réussi aussi à les exclure des cartes minima, le théorème serait démontré, ainsi qu'il l'a cru et publié: on sait en effet depuis longtemps, et Kempe le dit explicitement, que tout polyèdre à sommets trièdres possède des faces ayant au plus cinq côtés.

Pour s'en assurer, il suffit de considérer les équations très simples que voici, où f_n $(n \geq 2)$ désigne le nombre des polygones de n côtés que contient la carte; le Rév. Kirkman [1] les connaissait déjà en 1855, mais d'une façon imparfaite:

---

[1] KIRKMAN, *Mem. litt. & phil. Soc.*, 2, XII, p. 47-70, Manchester, 1855.

Digitized by Google

$f = \sum_n f_n$ (définition de f);

$f + s = a + 2$ (équation d'Euler);

$2a = \sum_n n f_n$ (somme des nombres des côtés des faces);

$2a = 3s$ (nombre total des arêtes aux sommets, qui sont tous trièdres).

On en tire, en éliminant s, a et f:

$$\sum_n (6 - n) f_n = 12$$

ou

$$4f_2 + 3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + f_7 + 2f_8 + 3f_9 + \ldots.$$

Donc, dans une carte minima, où $f_2 = f_3 = f_4 = 0$ (voir § 11), on a $f_5 \geq 12$. L'exemple le plus simple est celui du dodécaèdre pentagonal.

Cette relation entre le nombre des faces de moins de six côtés, et celui des faces de plus de six côtés, qu'on pourrait appeler les faces *mineures* et les face *majeures*, est fondamentale et très curieuse; on y remarque surtout l'absence de f_6, nombre des hexagones.

13. Malheureusement, pour réduire l'un de ces pentagones, Kempe employait *successivement* deux opérations analogues à celle qui a réussi pour les quadrilatères, et il ne voyait pas que la première pouvait empêcher la seconde.

Sa démonstration, avec cette faute grave qui dépare des remarques très judicieuses, fut acceptée de tous, jusqu'au jour où M. Heawood, en 1890 (1), non seulement souligna clairement l'erreur théorique, mais prouva par un exemple, que le cas où cette erreur intervient, peut effectivement se présenter.

Indépendamment de lui, M. de la Vallée Poussin (2) donna un autre exemple, plus simple encore et du même genre. Tout restait donc à refaire.

M. Heawood ne se contenta pas de ce résultat destructeur; dans le même article, il démontra en quelques lignes par in-

---

(1) Heawood, *Quart. J. pure and appl. Math.*, XXIV, p. 332-338, Londres, 1890.

(2) De la Vallée Poussin, *Interm. Math.*, III, p. 179-180, Paris, 1896.

Digitized by Google

duction, que dans tous les cas, une carte sur la sphère peut être coloriée en *cinq* couleurs, ce qui est déjà très intéressant.

14. Divers mathématiciens ont complété les résultats précédents par de nouvelles réductions; très importantes sont celles qu'a données M. Birkhoff (1): il a démontré, par exemple, qu'une carte minima ne contient pas deux, trois ou quatre faces formant un *anneau* simple; que s'il y a un anneau de cinq faces, celui-ci entoure nécessairement un pentagone; et qu'aucun pentagone n'est adjacent à trois pentagones consécutifs.

M. Franklin (2) a établi de même qu'une carte minima ne contient pas d'hexagone adjacent à trois pentagones consécutifs et d'autre propositions importantes.

Enfin, nous-même avons démontré (3) qu'à une certaine condition C, on peut réduire par exemple tout anneau simple formé d'un nombre pair de polygones, qui soient des pentagones réunis en suites paires et des hexagones.

Pour effectuer cette réduction, on remplace la carte M par une autre M', dans laquelle on a effacé l'anneau et joint deux à deux les arêtes issues des hexagones et des paires de pentagones; il suffit alors de montrer qu'un coloriage de M découle de celui de M'.

Encore faut-il que M' soit effectivement une carte; tel ne serait pas le cas si, après avoir effacé l'anneau et réuni les arêtes qui en sont issues, le réseau obtenu contenait un isthme: la condition C annoncée plus haut est précisément que le réseau réduit soit sans isthme.

Nous n'avons pas pu démontrer que C est toujours satisfaite; au contraire, nous avons trouvé une carte où elle ne l'est pas; toutefois cette carte est réductible pour d'autres motifs. Il serait intéressant d'en construire une, dont on ne connaîtrait aucune réduction et qui contiendrait un de nos anneaux, mais donnant lieu à un isthme, si l'on tentait de le réduire.

---

(1) — *Amer. J. Math.*, XXXV, 2, p. 115-128, Baltimore, 1913.
(2) Voir p. 26 (1).
(3) — *Bull. Soc. math. Fr.*, LIII, p. 42-45, Paris, 1925.

Digitized by Google

Grâce aux réductions énoncées à ce jour, nous avons pu démontrer un corollaire qui, pour la question des quatre couleurs, ne paraît pas sans intérêt: *Toute carte formée uniquement de pentagones et d'hexagones contient nécessairement une configuration réductible;* autrement dit: s'il existe une carte minima, elle contient au moins une face ayant au moins sept côtés.

Peut-être pourrait-on démontrer sans trop de peine, que toute carte formée de pentagones et d'hexagones est certainement coloriable en quatre couleurs, ce qui affirmerait avantage; pour cela, toutes les réductions nécessaires, appliquées à cette carte, devraient la transformer en une autre n'ayant aussi que des pentagones et des hexagones, ce qui complèterait l'induction.

15. Pour terminer cette question, nous allons donner la liste des réductions publiées [1], [2], [3], [4].

S'il existe des cartes sur la sphère qui ne soient pas coloriables en quatre couleurs, il en existe une, d'un nombre minima de faces, qui ne peut pas posséder:

1°) Un sommet de degré supérieur à trois (Kempe);

2°) Un anneau de moins de cinq faces (Birkhoff);

Corollaire: Cela exclut les régions à plusieurs frontières (régions *multiconnexes*) et les faces de moins de cinq côtés (Kempe);

3°) Un anneau de cinq faces n'entourant pas un pentagone (Birkhoff);

Corollaire: Toute face d'une carte minima est donc entourée d'un anneau de k faces ($k \geq 5$), entouré lui-même d'un anneau de l faces ($l \geq k$) (Birkhoff);

4°) Un anneau de six faces entourant seulement des pentagones, s'il y a plus de trois pentagones (Birkhoff);

Corollaire: Un pentagone adjacent à trois pentagones consécutifs (Birkhoff);

5°) Un hexagone adjacent à trois pentagones consécutifs (Franklin);

6°) Un pentagone adjacent à deux pentagones consécutifs et à trois hexagones (Franklin);

---

[1] [2] [3] [4] Voir p. 23 [2], p. 29 [1] [2] [3].

Digitized by Google

7°) Un anneau satisfaisant à la condition *C* et formé d'un nombre pair d'hexagones et d'un nombre pair, peut-être nul, de pentagones, ceux-ci groupés en suites paires (l'auteur);

Corollaire: Une face paire entourée d'hexagones avec ou sans paires de pentagones (Birkhoff et Franklin), car alors la condition *C* est certainement remplie;

8°) Un anneau satisfaisant à la condition *C* et formé d'un nombre pair de pentagones et de deux polygones quelconques consécutifs (l'auteur);

Corollaire: Une face paire entourée de pentagones et d'une paire de polygones consécutifs (qui peuvent être, par exemple, des pentagones) (Birkhoff et Franklin), car alors la condition *C* est certainement remplie;

9°) Un anneau satisfaisant à la condition *C* et formé d'un nombre pair de pentagones et d'un polygone quelconque (l'auteur);

Corollaire: Une face impaire entourée de pentagones et d'un polygone quelconque (qui peut être aussi un pentagone) (Birkhoff et Franklin), car alors la condition *C* est certainement remplie;

10°) Uniquement des pentagones et des hexagones (l'auteur).

16. Lorsque M. Franklin eût construit ses réductions, il fit connaître une carte échappant à chacune d'elles; formée uniquement de pentagones et d'hexagones, elle est donc réductible en vertu de notre travail postérieur. Nous avons publié (1) une carte évitant toutes les réductions connues, y compris les nôtres; elle est formée uniquement de pentagones et d'heptagones (fig. 1). M. Reynolds nous en a fait voir une autre ayant moins de faces, mais contenant aussi des hexagones; son travail est en cours de publication. Et nous en connaissons d'autres.

Mais ces cartes sont réductibles, si l'on tient compte de nouvelles réductions que nous croyons pouvoir annoncer et auxquelles n'échapperait aucune carte que nous connaissions aujourd'hui.

---

(1) — *Association fr. Avanc. Sc., Comptes-rendus*, congrès Liége 1924. p. 96-99, Masson, Paris, 1925.

Digitized by Google

Il reste une remarque, c'est que si à une carte ne s'applique aucune des réductions publiées, cela ne veut pas dire qu'elle soit minima au sens que nous avons defini; chaque fois que le cas s'est présenté, on a pu montrer après quelques essais, qu'elle était coloriable en quatre couleurs, même avant de savoir en vertu de quelle configuration; et cela se

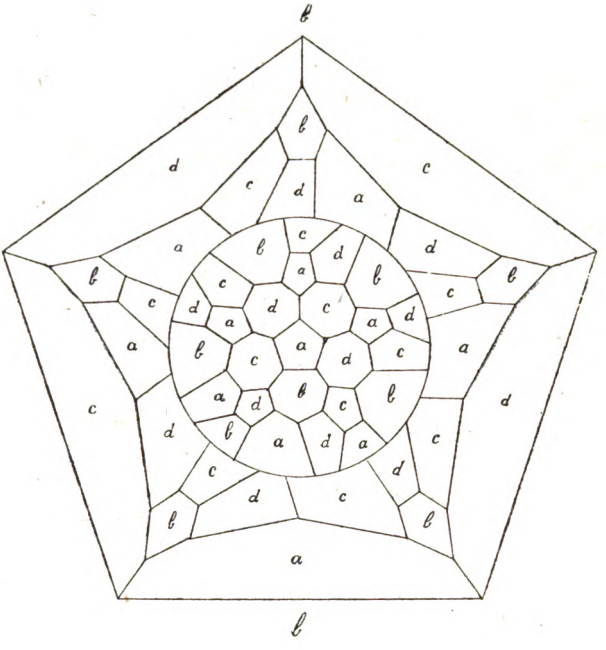


Fig. 1.

présentera vraisemblablement encore! Trouver une carte qui ne pourrait jamais être coloriée, serait résoudre la question, et démontrer que ce qu'on nomme le *nombre chromatique* pour la sphère est *cinq*.

17. M. Heawood trouva aussi [1] un résultat très inattendu, concernant les cartes que l'on peut tracer sur des surfaces bilatères, de genre supérieur à O, autrement dit les polyèdres inscrits dans un *tore à un ou plusieurs trous*, polyèdres percés,

---

[1] Voir p. 28 [1].

Digitized by Google

si l'on peut dire, de « tunnels », pour lesquels Lhuilier (1) avait depuis longtemps généralisé la formule d'Euler.

Après s'être demandé combien de couleurs sont nécessaires pour colorier les faces d'un polyèdre à un tunnel, M. Heawood a prouvé par induction, et c'est aussi un corollaire du théorème de Lhuilier, que le nombre des faces en contact avec une face donnée n'y dépasse pas six; une induction permet donc évidemment d'affirmer que sept couleurs suffisent. D'autre part, il a démontré que l'on peut diviser le tore en sept hexagones adjacents chacun à chacun, sept *spatia confinia*, comme disait Möbius (2); cela prouve que moins de sept couleurs ne suffiraient pas toujours et que le nombre chromatique pour le tore est *sept*.

Le problème de la carte est donc résolu pour les géographes vivant sur les anneaux de Saturne: toutes leurs cartes sont coloriables en sept couleurs et ce nombre ne peut être abaissé!

La même démonstration se généralise si le genre, c'est-à-dire le nombre des tunnels, est plus grand que l'unité: M. Heawood établit, quel que soit le genre, une borne supérieure du nombre chromatique; une borne inférieure est donnée par le polyèdre ayant, comme faces, le plus grand nombre possible de spatia confinia. Ces deux limites sont égales, aussi loin que ces constructions ont été faites, c'est-à-dire par M. Heffter (3) jusqu'au genre 6 inclus et probablement pour un genre positif quelconque.

Ce n'est que pour la genre 0 que les bornes ne sont pas les mêmes. En effet, Möbius devait à son ami Weiske (4) la remarque que sur une sphère ou dans un plan il n'y a pas plus de quatre régions adjacentes chacune à chacune, quatre spatia confinia, ce dont le lecteur peut s'assurer sans peine. Baltzer (5) montra clairement le lien entre cette remarque et le problème des quatre couleurs, lien que Klein lui avait

---

(1) LHUILIER, *Ann. Math. pures et appl.* (Gergonne), III, p. 169-189, Nîmes et Paris, 1812-1813.

(2) MÖBIUS, WEISKE et KLEIN, cités par Baltzer, Ber. Math. Phys. Classe, XXXVII, p. 1-6, Leipzig, 1885.

(3) HEFFTER, *Math. Ann.*, XXXVIII, p. 447, Leipzig, 1891.

(4) e (5) Voir (2).

Digitized by Google

suggéré et que sans doute Kempe et Tait connaissaient déjà. C'est pourquoi, en tenant compte du résultat de M. Heawood, l'on ne sait pas encore aujourd'hui si, pour la sphère, le nombre chromatique est quatre ou cinq, mais seulement qu'il est l'un ou l'autre.

18. Nous pensons qu'il n'est pas sans intérêt de signaler aux lecteurs du Periodico, deux formes, d'ailleurs classiques, sous lesquelles notre problème peut se traduire.

Faisons d'abord une remarque. Considérons un réseau quelconque dans un espace quelconque; nous dirons qu'il est *homogène* et du n^e *degré,* si chacun des sommets est du n^e degré. Un réseau du premier degré ou *linéaire* sera formé d'arêtes isolées les unes des autres; un réseau du second degré ou *quadratique,* de cycles pareillement isolés; une carte minima serait déterminée par un réseau connexe du troisième degré ou *cubique,* et ceci est vrai non seulement des cartes tracées sur la sphère, mais sur des surfaces quelconques, même unilatères; un échiquier est engendré par un réseau *quartique* ou *quadrillé.*

Un réseau de degré n est *résoluble* (1), s'il est décomposable en deux réseaux homogènes de degrés n' et n'' respectivement, ceux-ci possédant chacun tous les sommets du réseau donné; et alors $n = n' + n''$; autrement, il est *primitif* (ou irréductible). Le réseau cubique primitif le plus simple, selon Petersen (2) était, dû à Sylvester.

Il est évident qu'un réseau quadratique formé d'un nombre quelconque de polygones pairs, est résoluble. Petersen a démontré qu'il n'existe pas de réseau primitif de degré pair > 2, mais qu'il en existe de tout degré impair.

19. Considérons maintenant sur la sphère un réseau cubique déterminant une carte, et demandons-nous si l'on peut donner à chaque arête l'un des indices $f, g, h,$ de façon qu'à chaque

---

(1) — *Interm. Math.*, V, p. 225-227, Paris 1898.

(2) PETERSEN, *Acta Math.*, XV, p. 193-220, Stockholm, 1891,

Digitized by Google

sommet aboutisse une arête de chaque indice. L'on sait depuis Tait [1], [2] que ce problème est équivalent à celui des quatre couleurs.

En effet, supposons notre carte coloriée en b, n, r, v, et marquons une arête,

de l'indice f, si elle sépare un b d'un n ou un r d'un v;
de l'indice g, si elle sépare un b d'un r ou un n d'un v;
de l'indice h, si elle sépare un b d'un v ou un n d'un r.

De cette façon, chaque arête reçoit un indice, et il est visible que les trois indices concourent à chaque sommet.

Inversement: supposons les arêtes marquées des indices f, g, h; je dis que la carte est coloriable en quatre couleurs.

En effet, les arêtes f et g constituent ensemble un réseau quadratique, formé d'un certain nombre de cycles isolés les uns des autres. Ce réseau définit une carte très simple, que l'on peut colorier en deux couleurs, x et y, ainsi qu'on s'en rendra compte facilement. Les arêtes f et h définissent de même un réseau quadratique, dont la carte est coloriable en t et u.

Or, le réseau donné s'obtient par la superposition des réseaux fg et fh; chaque face portera l'une des quatre combinaisons de couleurs xt, xu, yt, yu, que nous appellerons b, n, r, v, et qui apparaîtront forcément sans collision.

Les deux problèmes sont donc identiques.

20. Tait a énoncé cette proposition sous une forme qui revient à ceci: Etant donné un réseau du troisième degré, il est toujours possible d'en marquer les arêtes des indices f, g, h, respectivement, de façon qu'à chaque sommet aboutisse une arête de chaque indice. Mais il s'est aperçu bientôt qu'il devait ajouter la condition que le réseau fût sans isthme. Si par exemple, il s'agit d'un labyrinthe dont chaque croisement de chemins soit un « trivium », on peut s'arranger pour qu'il s'y rencontre un sentier en gazon, un autre en gravier et un autre en dalles.

---

[1] Tait, *Proc. R. Soc.*, X, p. 501-503 et. p. 729, Edimbourg, 1880.
[2] — *Trans. R. Soc.*, XXIX, p. 657,660, Edimbourg, 1880.

Digitized by Google

Petersen a démontré (1) par un petit exemple, que le théorème, même ainsi précisé, est faux; cet exemple (fig. 2) est celui d'un réseau dans l'espace et qui ne peut être placé sur une sphère; mais il peut l'être sur un tore, ainsi que nous l'avons établi. D'ailleurs, comme M. Roberts (2) l'a indiqué, Tait (3) a énoncé explicitement une condition équivalente à la connexion zéro; il semble que Petersen ne s'en soit pas aperçu.

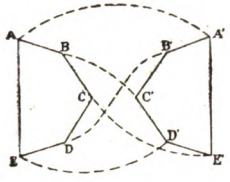


Fig. 2.

Mais au moins, sur la sphère, ce théorème est-il vrai? Tait le considérait comme un corollaire de celui des quatre couleurs; mais l'écroulement de la démonstration de Kempe et d'autres non moins fautives dues à Tait lui-même, a entraîné son théorème, qui est aujourd'hui plus incertain que jamais.

On peut l'énoncer comme suit sous forme de question: *Est-il vrai qu'un réseau cubique, sphérique et sans isthme soit résoluble en trois réseaux linéaires* (celui des f, celui des g et celui des h)?

21. Pour démontrer que le nombre des invariants d'un système de formes binaires est fini, M. Hilbert (4) utilisait un théorème de Gordan sur certaines équations de Diophante, dont on peut tirer ceci: que si l'entier n est donné, il existe un nombre fini N d'expressions homogènes en $x_1, x_2, \ldots x_n$, de la forme $(x_1 - x_2)^\alpha (x_1 - x_2)^\beta \ldots (x_{n-1} - x_n)^\varepsilon$, telles que toutes les autres expressions de la même forme peuvent s'obtenir par multiplication des N expressions fondamentales.

Petersen, pour construire toutes ces expressions fondamentales, autrement dit, les invariants de ces formes binaires, a traduit cette question dans le langage des réseaux: il lui suffit de représenter les x_i par des points, et les facteurs $x_i - x_j$ par des arêtes les reliant.

---

(1) Voir p. 34 (1).

(2) Roberts, *Proc. Math. Soc.*, XXXIV, p. 268, Londres, 1902.
— Sainte-Laguë, voir *Mémorial.*

(3) — *Philos. Magazine*, 5, XVII, p. 30-46, Londres, 1884.
— Voir aussi *Scientific Papers*, I, n.° LIV, p. 408-411, 1898 et II n.° LXVI, p. 93-95, 1900, Cambridge.

(4) Hilbert, *ibid.* XXXIII, p. 223-226, Leipzig, 1889.
— Hunziker, *Ü. d. Kartenfärbungsproblem*, thèse, Leemann, Zurich, 1924.

Digitized by Google

Il a donc été amené à déterminer tous les réseaux homogènes primitifs. Et s'il a résolu la question comme nous l'avons dit (§ 18), lorque le degré du réseau est pair, il n'est pas arrivé bien loin quand il est impair. Cependant il a trouvé un théorème très profond concernant les réseaux cubiques et qui permet de les énumérer tous; mais sa démonstration est très difficile; elle a été simplifiée successivement par M. Brahana (1), par nous-même (2) et par M. Sainte-Laguë (3).

Bien entendu, la doctrine de Petersen concerne les réseaux tracés dans un espace quelconque, et non plus simplement sur une surface donnée. Son théorème est donc plus général que la proposition indémontrée de Tait; mais il affirme moins.

Pour pouvoir l'énoncer, une nouvelle définition est nécessaire: nous référant à celle des isthmes, nous dirons avec Petersen, qu'une partie d'un réseau connexe constitue une *feuille,* si elle n'est rattachée au reste du réseau que par une seule arête, forcément un isthme, et de plus si elle-même ne contient pas d'isthme. Cette dernière condition a été explicitement énoncée par M. Brahana, et l'on ne saurait s'en passer.

On montre sans peine qu'un réseau sans isthme est toujours sans feuille; qu'un réseau contenant un ou plusieurs isthmes contient au moins deux feuilles; et que pour qu'un réseau ait exactement deux feuilles, il faut et il suffit que tous ses isthmes appartiennent à un seul alignement.

Voici maintenant le théorème de Petersen: *Un réseau primitif du troisième degré possède au moins trois feuilles.*

Autrement dit: un réseau cubique qui n'a pas plus de deux feuilles, est toujours résoluble; il l'est donc en deux réseaux respectivement des premier et second degrés. Tel sera le cas du réseau d'une carte sphérique.

Pour un tel réseau, il ne reste qu'à démontrer ceci: *sur la sphère la réduction est possible de telle façon que le facteur quadratique soit lui-même réductible,* pour prouver que le réseau d'une carte sphèrique est résoluble en trois réseaux linéaires,

---

(1) Brahana, *Ann. Math.*, 2, XIX, p. 59-63, Princeton, 1917.

(2) — *Mathesis,* XXXVI, p. 56-61, Stevens, Bruxelles et Gauthier-Villars, Paris, 1922.

(3) Voir p. 21 (2).

Digitized by Google

f, g, h, c'est-à-dire pour démontrer le théorème de Tait, et pertant, celui des quatre couleurs.

22. Toujours sur la sphère, considérons notre réseau cubique sans isthme, dont les arêtes soient munies des indices *f, g, h,* comme il a été dit, et imposons à chaque sommet l'affixe $+1$ ou -1, selon le sens de rotation qui permette de rencontrer dans l'ordre *fgh* les arêtes qui y aboutissent.

L'on démontre simplement (1) que *la somme algébrique des affixes des sommets d'une face quelconque est divisible par trois.* Il suffit, pour le voir, de montrer qu'en faisant le tour de la frontière d'une face, à partir d'une arête quelconque, chaque fois qu'on traverse un sommet porteur d'un des affixes, l'on avancera d'un pas dans l'ordre cyclique *fgh,* et chaque fois que ce sera un sommet de l'autre affixe, on reculera d'un pas; la somme algébrique doit donc être divisible par trois, pour qu'on puisse aboutir à l'arête de départ.

Inversement, on démontrerait que si, dans un tel réseau, on peut marquer chaque sommet de l'affixe $+1$ ou -1, de manière que la somme algébrique des affixes de chaque face soit divisible par trois, alors on peut donner à chaque arête l'un des indices *f, g, h,* de façon qu'une arête de chaque sorte aboutisse à chaque sommet.

La possibilité de pourvoir les sommets des affixes $+1$ et -1 avec cette condition de divisibilité, est donc elle aussi équivalente au théorème des quatre couleurs; et M. A. C. Dixon (2) fait remarquer que la réduction de quatre couleurs à trois indices, puis à deux affixes, présente une analogie curieuse avec la résolution d'une équation quartique par une cubique, et celle d'une cubique par une quadratique. Mais ce n'est là sans doute qu'une amusante coïncidence.

23. Il y a beaucoup d'autres formes dont on peut revêtir notre théorème, par exemple celle-ci due à M. Heawood (3): *Dans un polyèdre de genre zéro à sommets trièdres, est-il pos-*

---

(1) — *Ibid.*, XXIX, p. 270-285, Londres, 1897.
— HEEGAARD, voir *Encykl.*
(2) — *Rep. Brit. Ass.*, 83, p 399. Birmingham, 1913.
(3) Voir p. 28 (1).

Digitized by Google

sible de tronquer certains sommets (tout au plus la moitié des sommets, remarqué [1] M. Wernicke) *par des faces triangulaires, de manière que toutes les faces du polyèdre obtenu aient un nombre de côtés divisible par trois?*

On peut de même le déguiser sous un aspect algébrique, et cela de plusieurs façons, notamment en introduisant élégamment avec M. Heawood [2] les congruences linéaires, et avec M. Veblen [3], le calcul des matrices.

Enfin, on s'est demandé des questions de même nature, par exemple: peut-on faire le coloriage avec des conditions imposées, telle que donner la même couleur à la « mère patrie » et à ses « colonies »? Ici encore M. Heawood [4] a montré que le cas le plus difficile est celui d'où est absent ce qui paraissait une difficulté de plus.

Certaines de ces questions sont tout à fait élémentaires; ainsi, l'on voit (cf. § 19) que si, dans une carte sphérique, tous les sommets sont de degré pair, deux couleurs suffisent; et si chaque face est adjacente à un nombre pair de faces, sans que deux d'entre elles aient plus d'une arête commune, alors trois couleurs suffisent; et ainsi de suite.

Pour toute cette théorie, nous nous permettons de renvoyer les lecteurs à notre thèse, à la notice de M. Brahana [5] et, pour la question des réseaux, à l'article du Mémorial: l'on y trouvera, ainsi que dans l'Edition allemande de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques [6], de multiples indications bibliographiques, qui pourront être utiles à ceux qui voudraient s'attaquer au problème.

24. Peut-être est-ce l'occasion de rappeler, qu'à tout polyèdre tracé sur une surface, correspond un polyèdre réciproque, obtenu de la façon suivante: dans chaque face on marque un point; et l'on joint par des arêtes ceux de ces points qui sont

---

(1) WERNICKE, *Math, Ann.*, LVIII, p. 413-426, Leipzig, 1904.
(2) Voir p. 38 (1).
(3) VEBLEN, *Ann. Math.*, 2, XIV, p. 163-178, Princeton, 1913.
— WEISKE, voir MÖBIUS
(4) Voir p. 28 (1).
(5) Voir p. 20 (3).
(6) *Encykl. Math. Wiss.*, III, 1, 1, Analysis Situs, par DEHN et HEEGAARD, p. 177-178, Leipzig, 1907.

Digitized by Google

dans des faces adjacentes, de façon qu'une arête nouvelle traverse chaque arête ancienne.

Les nombres des sommets et des faces du nouveau polyèdre sont égaux respectivement aux nombres des faces et des sommets de l'ancien; à un réseau cubique correspond un système de triangles; au cube, l'octaèdre; au dédocaèdre, l'icosaèdre; et à toute proposition de nature énumérative, une proposition corrélative. On peut traduire ainsi le théorème des quatre couleurs, mais nous ne le ferons pas. Cette idée dualistique permet de transformer la proposition de Petersen sur les réseaux cubiques en un théorème curieux sur les systèmes fermés constitués de triangles.

25. Un autre mode d'attaque est le suivant, qui fut tenté d'ailleurs en vain après M. Dixon [1], par M. Birkhoff [2]: chercher à exprimer le nombre de manières de colorier une carte, en fonction du nombre des faces; on arrive à des formules de récurrence; malheureusement la difficulté réapparaît, quand on veut démontrer que ce nombre n'est pas nul, mais positif, par exemple en prouvant qu'il n'est pas divisible par certains entiers.

26. Si de simples opinions peuvent avoir en mathématiques la moindre importance, rappelons que Petersen a écrit [3]: « S'il fallait gager, je tiendrais que le théorème des quatre couleurs n'est pas exact ». Tout compte fait, nous penserions plutôt le contraire.

Un illustre mathématicien nous dit un jour dans une conversation, que si le théorème était faux, sans doute un exemple l'infirmant contiendrait un nombre formidable de faces. Nous voudrions dire quelques mots des recherches faites dans cette voie et montrer combien l'on paraît, ici encore, loin de la solution.

27. Nous avons établi (voir § 12) qu'un polyèdre de genre zéro à sommets trièdres et dont les faces n'ont pas moins de cinq côtés, contient au moins douze pentagones.

---

(1) Dixon, *Mess. Math.*, XXXII, p. 81-83, Londres et Cambridge, 1902-1903.
(2) Birkhoff, *Ann. Math.*, 2, XIV, p. 42-46, Princeton, 1912.
(3) — *ibid*, VI, p. 36-38, Paris, 1899.

Digitized by Google

Une analyse plus serrée a montré à M. Wernicke (1), qu'un tel polyèdre possède sûrement un pentagone adjacent, soit à un pentagone, soit à un hexagone; M. Franklin (2) est allé plus loin, en prouvant qu'il y a forcément un pentagone adjacent soit a deux pentagones, soit à un pentagone et un hexagone, soit à deux hexagones; mais nous pourrions montrer par un exemple que l'on ne peut pas poursuivre jusqu'à trois.

M. Franklin en a déduit un théorème assez décourageant et que voici: Une carte minima contient au moins 26 faces.

M. Reynolds, dans sa note en cours de publication, améliore un peu le résultat, en portant ce chiffre à 28: que nous sommes loin des nombres astronomiques auxquels on pouvait s'attendre!

On sait donc aujourd'hui exactement ceci, que ***toutes les cartes ayant au plus 27 faces sont coloriables en quatre couleurs....***

28. Nous voudrions souligner enfin, comme nous l'avons déjà fait ailleurs, qu'on est amené tout naturellement à étudier les différents types de polyèdres que l'on peut construire; c'est à cela que revient en somme la méthode des réductions.

Et si d'aucuns peuvent croire que le problème des quatre couleurs, par sa nature et malgré sa difficulté, relève plus des récréations géométriques que des mathématiques classiques et doctrinales, pourront-ils vraiment, nous ne disons pas défendre victorieusement cette thèse, mais exprimer du dédain pour le problème immense, à peine entrevu et sur lequel M. Lebesgue (3) a attiré l'attention des savants: ***l'énumération des polyèdres possibles?***

Uccle.

A. Errera

(1) Voir p. 39 (1).
(2) Voir p. 26 (1).
(3) Voir p. 22 (3).

Digitized by Google

Le « Opere di Diofanto » tradotte da Paul ver Eecke

Tutti conoscono il nome di DIOFANTO, non fosse altro a cagione di quella *analisi indeterminata di primo grado* che, senza giusta ragione, viene detta DIOFANTEA; ma ben pochi conoscono le di lui opere e sanno quale valore esse abbiano nella storia della Scienza e quanto interesse anche oggi possano destare i molti elegantissimi, difficili problemi che esse contengono. Problemi che hanno suggerito al FERMAT i suoi più geniali teoremi sulla teoria dei numeri, e che non hanno ancora perduto (dopo tanti secoli) un indefinibile carattere di novità e di freschezza.

Ma nelle opere di DIOFANTO all'interesse della materia contrasta la difficoltà della lingua e, nelle traduzioni in linguaggio algebrico, l'aridità del simbolismo travisa la concezione originaria, e non lascia traccia del metodo.

Perchè DIOFANTO potesse essere inteso, nello spirito e nella forma, occorreva una traduzione letterale e fedele, che ne interpretasse le sottigliezze dialettiche, e gli accorgimenti stilistici. Occorreva insomma che il traduttore fosse buon matematico, ottimo grecista, padrone assoluto della materia. Tale in effetto si è dimostrato il prof. PAUL VER EECKE, nella versione (1) che presento ora ai lettori del *Periodico*.

---

(1) DIOPHANTO D'ALEXANDRIE. *Les six livres mathematiques et les livre des nombres polygones.* Oeuvres traduites pour la première fois en français, avec une introduction et des notes par PAUL VER EECKE. [Desclée de Brouver et C. Bruges, 1926, 8° grande, pp. XCI + 392, Francs. 50].

Digitized by Google

DIOFANTO ALESSANDRINO, ultimo, per ordine di tempo, dei grandi matematici greci, visse nel 3° secolo d. C.; compose un'*Aritmetica*, in tredici libri, dei quali sei solamente sono giunti fino a noi.

Il titolo di quest' opera mostra che ai tempi di DIOFANTO non sussisteva la distinzione fra la teoria dei numeri (aritmetica), ed il calcolo numerico (logistico) voluta da PLATONE; poichè in essa si riscontra una logistica elevata a dignità di scienza, in tutto corrispondente alla nostra ALGEBRA.

Nella lettera dedicatoria DIOFANTO introduce il concetto di *numero cercato*, o *numero incognito*, o più generalmente di *numero che possiede in se una quantità indeterminata di unità*, che egli indica costantemente col vocabolo ἀριθμός ed indica con la lettera finale ς.

Ad indicare questo concetto gli arabi e gli italiani della rinascenza usarono le voci *cosa, radice, posizione...* il BOMBELLI preferì il vocabolo *tanto*, ed il PAUL VER EECKE, nella presente traduzione, per non snaturare l' antica denominazione ha introdotto il neologismo: *arithme*.

Le potenze dell' *arithme* e dell' inversa dell' *arithme* fino alla potenza sesta sono designate da DIOFANTO con gli stessi nomi che più tardi usarono gli arabi e gli italiani della rinascenza, e con lo stesso procedimento, dall' uno e dagli altri, si insegnano le regole della moltiplicazione di dette potenze.

Dopo aver esposto la regola dei segni per la moltiplicazione (ce qui est de manque multiplié pour ce qui est de manque, donne ce qui est positif...) vengono esposte in DIOFANTO le regole che dagli Arabi furono dette di *Algebra ed Almukabala* per la risoluzione delle equazioni.

Queste regole danno immediatamente la risoluzione di equazioni binomie o, come dicevano gli antichi, *semplici* (1) (une seule expression égale à un seule expression).

DIOFANTO soggiunge poscia: *Je te montrerai plus tard comment l' on résout le cas ou il reste deux expressions égales à une seule.*

Ma questa dimostrazione (che si riferisce alle equazioni di 2° grado trinomie, o, come dicevano gli antichi, *composite* (2))

(1) Cfr. p. es. LEONARDO PISANO. *Scritti...* Vol. I, pag. 406.
(2) loc. cit., pag. 407.

Digitized by Google

non è contenuta nei libri rimastici di DIOFANTO; ove peraltro si risolvono correntemente tali equazioni, come se il lettore ne fosse già a cognizione.

É sorprendente l'analogia fra questa introduzione Diofantea e quello che si riscontra su tale materia nei trattati arabici di *Algebra* ed *Almukabala*.

Non solo, infatti, si tiene lo stesso ordine nella esposizione, e si segue la medesima classificazione delle equazioni; ma si usano gli stessi termini.

È interessante il confronto con l'8° Capitolo dell'opera di BEHA EDDIN: « *Essenz der Rechenkunst* » (übersetzt von G. NESSELMANN).

Ecco p. es. i passi riguardanti la riduzione delle equazioni:

DIOFANTO (trad. v. EECKE) (1)

Si des expressions négatives se présentent de quelque manière, soit d'une part, soit de part et d'autre, il faudra ajouter ces expressions négatives de part et d'autre, jusqu'à ce que les expressions deviennent positives de part et d'autre, puis retrancher de nouveau les semblables des semblables jusqu'à ce qu'il reste une seule expression de part et d'autre.

Applique cela avec adresse aux données des propositions, et, autant que possible, jusqu'à ce qu'il reste une seule expression égale à une seule expression. Je te montrerai plus tard comment l'on résout le cas où il reste deux expressions égales à une seule.

BEHA-EDDIN (trad. NESSELMANN) (2)

Die Seite welche eine Negation enthält, wird ergänzt, und das dieser Gleiche auf der andern addirt, und das heisst *Al-gebr*; die homogenen und gleichen Glieder auf beiden Seiten werden ausgeworfen aus beiden, und das heisst *Al-mokabalah*.

Dann besteht die Gleichung entweder zwischen einem Gliede und einem Gliede, und dieser (Fall) hat drei Formen,

---

(1) Livre I, pag. 8.

(2) BEHA-EDDINS' s. *Essenz der Rechenkunst*. Arabisch und deutsch herausgegeben von D.r G. H. F. NESSELMANN. Berlin 1843, pag. 41.

Digitized by Google

welche *einfache* genannt werden; oder zwischen einem Gliede und zwei Gliedern, und auch dieser (Fall) hat drei Formen, welche *Zusammengesetzte* heissen.

Questa così stretta corrispondenza conforta la opinione che ritiene di origine greca anche l'algebra degli arabi, e ci fa riconoscere nella « *Aritmetica* » di DIOFANTO il più antico trattato di Algebra a noi pervenuto.

Si può anche osservare che se DIOFANTO spiccia questa materia in così brevi termini, per passar subito poi a ben più difficili problemi, ciò significa che nella scuola Alessandrina, al III secolo, la risoluzione delle equazioni dei due primi gradi era già sufficientemente conosciuta.

L'opera di DIOFANTO era divisa in 13 libri, ma di questi 7 sono andati perduti, ed il disordine con cui nei 6 rimanenti sono distribuite le proposizioni, fa sospettare che anche la divisione attuale nei 6 libri non risponda alla primitiva, e taluno ha creduto di riconoscere che la parte mancante non costituisse la continuazione dell'opera, ma dovesse essere situata nel corpo dei sei libri a noi pervenuti.

Certamente si sono perduti lemmi e proposizioni comprendenti teorie generali necessarie al retto intendimento della risoluzione dei problemi contenuti nei libri che ci sono rimasti.

Nella dotta, chiara, interessante *Introduzione* premessa dal traduttore, c'è una estesa analisi dei 6 libri diofantei, che io qui mi studierò di riassumere brevemente.

Bisogna premettere, che DIOFANTO considera la classe dei numeri come costituita dagli interi e dai frazionari.

Gli irrazionali ed i negativi sono esclusi, per modo che quando un problema ammette solo risoluzioni negative, od irrazionali, od immaginarie, è senz'altro dichiarato *impossibile* da DIOFANTO.

Anche per i *problemi indeterminati*, che formano la parte più cospicua della sua opera, sono considerate come valide le *soluzioni razionali* (intere o frazionarie) *positive*. Talchè è da considerare come impropria la denominazione di *analisi diofantea*, che oggi si dà alla teoria che si occupa della risoluzione in numeri interi (positivi o negativi) di equazioni indeterminate di primo grado.

Digitized by Google

Tale teoria non è affatto considerata da DIOFANTO. In tutta l'opera sua si riscontrano appena 4 problemi indeterminati di primo grado, e questi sono da lui risoluti in modo al tutto diverso da quello oggi usato.

Le equazioni Diofantee non sono espresse con simboli letterali, ma hanno la forma di ordinario discorso continuato; tutt'al più si usano, nella scrittura delle equazioni, quelle abbreviazioni, delle parole più frequentemente adoperate, che erano in uso anche nella scrittura comune.

Il medesimo fatto si riscontra del resto anche presso gli algebristi arabi, e presso i primi algebristi italiani della rinascenza.

I sei libri di DIOFANTO comprendono 189 problemi.

Il primo libro contiene 21 problemi determinati di 1° grado, 13 determinati di 2° grado, 4 indeterminati di 1° grado, 1 indeterminato di 2° grado. Quest'ultimo è forse interpolazione di qualche scoliaste.

I problemi indeterminati di questo primo libro si risolvono semplicemente con l'assumere un valore arbitrario per una delle incognite.

I primi sette problemi del 2° libro sono di dubbia autenticità, perchè ripetono, salvo qualche variante insignificante, problemi del 1° libro: *tutti gli altri appartengono all' analisi indeterminata di 2° grado.*

Anche il 3° libro verte sull'analisi indeterminata di 2° grado e contiene problemi interessanti, la cui elegante soluzione diede argomento di bellissime generalizzazioni a FERMAT e ad EULER.

Nel 4° libro, insieme con problemi di analisi indeterminata di 2° grado, compariscono problemi di *analisi indeterminata di 3° grado*, ove eccelle l'abilità di DIOFANTO nella scelta dei dati e nell'uso di espedienti atti a ridurre le questioni proposte alla risoluzione di equazioni del 2° grado, aventi una radice razionale.

La prop. XXV. di questo libro contiene un teorema sulla teoria dei numeri che fu generalizzato da FERMAT nell'enunciato:

« ogni numero intero è triangolare oppure somma di tre numeri triangolari;

«... è quadrato oppure somma di quattro quadrati;

«... è numero pentagonale ovvero somma di cinque numeri pentagonali;

Digitized by Google

« . . . è numero esagonale oppure somma di sei numeri esagonali;

. . . . . .

dimostrato la prima volta sotto questa forma generale dal CAUCHY (1).

Anche le 30 proposizioni del Libro 5° appartengono alla analisi indeterminata del 2° e del 3° grado, all'infuori di due che conducono ad *equazioni indeterminate del 4° grado.*

Il 6° Libro è interamente dedicato alla formazione ed allo studio delle proprietà dei *triangoli pitagorici.* FRÉNICLE ne ha ricavato la sua operetta: *Traité des triangles rectangles en nombres,* ed anche FERMAT ha saputo ritrarne alcune proposizioni su la teoria dei numeri che sono fra le sue più belle.

Ai 6 Libri dell'*Aritmetica* è congiunto, nella traduzione di PAUL VER EECKE quello dei *Numeri Poligonali* di DIOFANTO, libro che non rappresenta un contributo originale; ma la sintesi degli studi che, a cominciare dalla scuola pitagorica, gli antichi avevano fatto sulle progressioni.

Ma le nozioni che prima di DIOFANTO erano date come speculazioni filosofiche, dedotte da verificazioni empiriche, nell'operetta di DIOFANTO acquistano carattere scientifico, poichè vengono provate con dimostrazione rigorosa, al modo di EUCLIDE.

Queste sono le *Opere di* DIOFANTO, cui il traduttore ha lasciato la forma originale, che fa meglio risaltare la potenza creatrice del pensiero antico. Il *donnent* (dice il traduttore) *une idée tellement éloignée des mathématiques modernes, qu' ils en acquièrent pour ainsi dire un indefinissable caractère de nouveauté, et procurent un sentiment de fraîcheur, qui contraste d'une manière frappante avec la sécheresse du symbolisme suraigu de notre algèbre actuelle.*

La lettura di queste opere è certamente molto difficile; uomini come VIÈTA, disperarono di poter intendere rettamente il senso di alcune fra le più belle ed ardue proposizioni, il FERMAT non isdegnò di farne oggetto di uno studio

(1) Mémoire de l'Institut, t. XIV, 1° série (anneés 1813, 1814, 1815). Nel volume di DIOFANTO alla pag. XXXII).

Digitized by Google

continuato e profondo; da esse egli trasse la ispirazione per le sue scoperte sulla teoria dei numeri, ed i suoi sentimenti di ammirazione espresse col verso italiano:

Mi par di vedere un gran lume

che il PAUL VER EECKE ha messo in fronte alla Introduzione al DIOFANTO, a modo di epigrafe.

Ma, nella traduzione di PAUL VER EECKE, ogni difficoltà è superata in grazia della trascrizione con le notazioni moderne e delle molte note di carattere tecnico, critico, storico, glottologico che il traduttore ha posto in calce ad ogni pagina.

In queste note consiste il pregio maggiore dell'opera di PAUL VER EECKE. Sono non meno di 1250, illustrano, chiariscono ogni passo, ogni voce, sviluppano calcoli, richiamano fatti ed idee, mostrano il legame con risultati anteriormente noti e con sviluppi moderni, ricollegano i problemi particolari a metodi ed a teorie generali, presentano, in lucida sintesi, tutti i risultamenti ottenuti dagli antichi e moderni commentatori su l'opera di DIOFANTO.

Non meno interessante dell'opera (anzi per talune categorie di studiosi più interessante ancora dell'opera) sarà la lettura della poderosa *introduzione*, che comprende 91 pagine di grande formato, e non solo raccoglie tutto quello che ci è noto della vita e dell'opera di DIOFANTO, ma ricerca i precursori, i commentatori greci ed arabi, i primi divulgatori in Italia e nei paesi bassi (BOMBELLI, STEVIN), i traduttori, i i commentatori (XYLANDRO, BACHET, CRIVELLI, POLSEGER, SCHULZ, HEATH, WERTHEIM, TANNERY); e l'opera di ciascuno esamina con cura assidua, diligente e con spirito critico.

Alcune delle notizie da lui raccolte (specialmente su gli italiani *Bombelli* e *Crivelli*) sono originali e fin qui inedite. Di speciale utilità riesciranno poi le brevi, ma succose e precise notizie biografiche e bibliografiche che egli ha dato per ognuno degli autori che ha dovuto nominare; ricordo: ANATOLIO Alessandrino - BACHET DE MÉZIRIAC - BOMBELLI - CAMERARIUS - CRIVELLI - FERMAT - GIRARD - GOSSELIN - PACHIMERA - PACIOLO - PLANUDE - PSELLO - REGIOMONTANO - STEVIN - TANNERY - XYLANDRO.

Digitized by Google

L' opera di DIOFANTO dopo molti secoli di obblio fu primamente riposta in luce dal BOMBELLI. Nella introduzione alla sua *Algebra* (1572) il Bombelli racconta che:

« ... questi anni passati, essendosi ritrovato una opera greca di questa disciplina nella libraria di Nostro Signore in Vaticano, composta da un certo *Diofanto Alessandrino* Autor greco, il quale fu à tempo di Antonin Pio, et avendomela fatta vedere Messer ANTONIO MARIA PAZZI, Reggiano, pubblico lettore delle matematiche in Roma, e giudicatolo con lui autore assai intelligente de' numeri (ancorchè non tratti de numeri irrationali, ma solo in lui si vede un perfetto ordine di operare) egli et io, per arrichire il mondo di così fatta opera, ci dessimo a tradurlo, e cinque (delli sette che sono) tradutti ne habbiamo; lo restante non havendo potuto finire per gli travagli avvenuti all' uno et altro ... ».

La traduzione di BOMBELLI può dirsi pubblicata nella sua Algebra, perchè fra i problemi del suo libro III egli ha intramezzato tutte [1] le proposizioni dei primi quattro libri e $^2/_3$ delle proposizioni del 5° libro.

La sua traduzione è affatto libera, poichè egli ha adattato le proposizioni Diofantee al linguaggio ed ai metodi allora in uso; e ciò ha fatto sì che ritornasse fra noi il gusto dei problemi indeterminati, ed ha spianato la via ai traduttori ed ai commentatori di DIOFANTO.

L' influenza dell' opera diofantea sull' ulteriore sviluppo dell' algebra non fu molto notevole in Italia [2] ma notevolissima in Francia, ove segnò l' inizio di quel fecondo periodo storico che è caratterizzato dallo sviluppo dell' *algebra letterale.*

L' opera di DIOFANTO è concepita con tanta genialità, sviluppata con tanta originalità e varietà di metodi, così ricca di risultamenti anche oggi (dopo 16 secoli) interessanti e nuovi,

---

[1] Toltene alcune che sono appunto quelle che si ritengono di dubbia autenticità.

[2] Per averne giusta idea basterebbe porre a riscontro le due edizioni dell'Algebra di BOMBELLI. Quella manoscritta, composta prima della conoscenza di Diofanto, che esiste nella Biblioteca dell'Archiginnasio in Bologna, e quella pubblicata per le stampe nel 1572, scritta dopo e sotto la ispirazione dell' opera di DIOFANTO.

Digitized by Google

che, anche all'infuori del suo valore storico, merita di essere oggetto di meditazione e di studio; è pubblicata in splendida edizione, e (pel nobile disinteresse dell'autore e dell'editore e per le facilitazioni della *Fondazione Universitaria Belga*), è messa in commercio a prezzo modico.

ETTORE BORTOLOTTI

Triangoli Eroniani

Nella presente Nota espongo un nuovo metodo per determinare i triangoli cosidetti *Eroniani*, ossia *razionali*.

Tradizionalmente si chiamano *Eroniani* (da Erone di Alessandria) i triangoli che hanno *lati ed area espressi da numeri interi*. È chiaro che questa proprietà non è *intrinseca* al triangolo, ma dipende dal modo di misurare i suoi lati ed area — modo che si presume conforme all'uso comune, secondo il quale i lati sono tutti misurati rispetto a uno stesso segmento u, e l'area rispetto al quadrato di u — e quindi è *relativa* alla scelta, che si presume già fatta, dell'unità di misura u. Tuttavia i triangoli Eroniani sono suscettibili di una *definizione intrinseca*, poichè in ogni triangolo Eroniano i rapporti dei lati tra loro e dell'area ai quadrati dei lati, sono razionali; e, viceversa, ogni triangolo *razionale*, cioè tale che i detti rapporti siano razionali, *si può ritenere Eroniano*, assumendo una conveniente unità di misura dei lati, ben facile a determinare. È chiaro inoltre che per ogni triangolo razionale c'è una unità di misura massima rispetto a cui esso risulta Eroniano — dal Lemma I apparirà che questa è il maggior sottomultiplo comune ai lati e al semiperimetro — e che ogni altra unità per cui ciò accade è sottomultipla di questa.

I triangoli con lati interi o razionali furono oggetto di studio fin dall'antichità. Tralasciando gli Egiziani che conoscevano il triangolo rettangolo di lati 5, 4, 3, si attribuiscono a Pitagora, Platone ed Euclide (1) dei metodi per determi-

(1) Cfr. G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. Milano, 1914.

Digitized by Google

nare i triangoli rettangoli aventi lati interi, che da molti si usano ancora oggi chiamarsi *triangoli Pitagorici*. Altri metodi per determinare i triangoli Pitagorici (mediante i quali per addizione e sottrazione si possono ottenere tutti i triangoli obliquangoli razionali) furono dati da Diofanto e dall'indiano Brahmagupta. Erone, che per il primo insegnò a calcolare l'area di un triangolo in funzione dei lati, insegnò pure a conoscere il triangolo di lati 15, 14, 13 il quale ha l'area espressa da 84; e appunto per questo si usano chiamare Eroniani i triangoli aventi lati ed area interi. Nei tempi più recenti, molti matematici si occuparono di problemi relativi ai triangoli razionali e di questioni di teoria dei numeri a quelli più strettamente legate; cito fra molti altri Fermat, Eulero, il nostro Genocchi; chi voglia notizie più estese e citazioni precise può consultare ad es. i volumi riguardanti la Teoria dei numeri nella Enciclopedia delle scienze matematiche, ediz. francese, e inoltre l'History of the Theory of Numbers di L. E. Dickson, Washington 1920. Ma io mi limito qui a dare un cenno di due lavori più recenti in cui sono esposti due metodi diversi per determinare i triangoli Eroniani, l'uno di H. Schubert (1), l'altro di A. Padoa (2). Lo Schubert, per esprimere i lati di un triangolo Eroniano, assume come parametri dei numeri che sostanzialmente equivalgono alle tangenti dei semiangoli del triangolo e al raggio del circolo circoscritto, giungendo a formule che sono abbastanza semplici ma che hanno, tra altri, il difetto di condurre a terne di numeri interi generalmente non primi tra loro. Il Padoa analizza il metodo dello Schubert, ne mette in luce i difetti tra cui principale quello ora detto, che egli afferma essere irrimediabilmente connesso al metodo dello Schubert, e per evitarlo espone un altro metodo mediante il quale giunge a terne Eroniane irriducibili e ordinate, ma attraverso un procedimento che, pur essendo ingegnoso, è assai più complicato e laborioso di quello dello Schubert e quindi assai meno atto alle applicazioni che questi non manca di fare a numerosi problemi. Nel mio procedimento in cui prendo le

(1) *Auslese aus meiner Unterrichts-und Vorlesungs praxis von Dr. Hermann Schubert.* 2 Band, Leipzig, Geschen, 1905.

(2) *Atti della Società ligustica di scienze e lettere.* 1925, vol. IV, pag. 254.

Digitized by Google

mosse da quello dello Schubert, abbandonandolo poi per adottare come ulteriore parametro il semiperimetro e giungendo a conclusioni più generali, io, a differenza del Padoa che si è basato su considerazioni esclusivamente aritmetiche, mi sono sforzato di rimanere aderente il più possibile alla natura geometrica del problema, convinto che nulla riesce a illuminare meglio le questioni aritmetiche e a renderle più facili quanto il cercare di *intuirle* geometricamente. A questo concetto anzi attribuisco la maggior semplicità e simmetria che mi lusingo di aver ottenuto nelle mie formule risolutive, che sono esposte nei teoremi I, II, III. In queste è inoltre da osservare che i parametri hanno tutti un significato geometrico ben definito e semplice, il che è di non lieve aiuto per la risoluzione delle svariate questioni che si riferiscono ai triangoli qui studiati.

I. Triangoli con lati ed area razionali.

Dato un triangolo qualunque, diciamo a, b, c, i suoi lati [1]; α, β, γ gli angoli; p il semiperimetro; S l'area; e poniamo:

$$(1) \qquad x = \operatorname{tg}(\alpha/2); \quad y = \operatorname{tg}(\beta/2); \quad z = \operatorname{tg}(\gamma/2).$$

Tutti questi numeri sono reali positivi e tra essi sussistono le relazioni:

$$(2) \qquad xy + yz + zx = 1$$

$$(3) \qquad a = p(1 - yz); \quad b = p(1 - zx); \quad c = p(1 - xy)$$

$$(4) \qquad p - a = pyz; \quad p - b = pzx; \quad p - c = pxy$$

$$(5) \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p^2xyz$$

La (2) si ricava osservando che poichè $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, si ha:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) : \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$$

cioè

$$z = (1 - xy) : (x + y)$$

---

[1] Qui, e sovente in seguito, dicendo lati, angoli, ecc. intendo i numeri che li misurano rispetto a un'unità affatto arbitraria ma prefissata (che per gli angoli suppongo sia il radiante).

Digitized by Google

che equivale alla (2). Per ottenere le (3) si sommino le relazioni: $a = 2\rho \operatorname{sen}\alpha$; $b = 2\rho \operatorname{sen}\beta$; $c = 2\rho \operatorname{sen}\beta$, dove ρ indica il raggio del circolo circoscritto; si ottiene:

$$2p = 2\rho(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma)$$

da cui

$$p = 4\rho \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Poi si divida per questa la prima delle tre relazioni suddette che si può scrivere:

$$a = 4\rho \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

si avrà:

$$\frac{a}{p} = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} : \left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) : \left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\right) : \left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

cioè

$$\frac{a}{p} = 1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

che coincide colla prima delle (3). Le (4) sono conseguenza immediata delle (3). La prima delle (5) è la nota espressione Eroniana dell'area e la seconda si ricava subito da questa mediante le (4).

Inversamente, siano dati quattro numeri reali positivi x, y, z, p soddisfacenti alla (2). Le (1) individuano allora tre angoli α, β, γ compresi tra 0 e π, la cui somma a causa della (2) è eguale a π, cioè individuano una classe di triangoli, tutti aventi gli angoli eguali ad α, β, γ (e quindi tra loro simili); fra questi ce n'è uno solo che ha il semiperimetro misurato da p. Dunque i quattro numeri x, y, z, p individuano un triangolo in cui le tangenti dei semiangoli sono espresse da x, y, z, il semiperimetro da p, i lati dalle (3) e l'area dalle (5).

Questo metodo per determinare un triangolo qualunque ci rende facile la ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè il triangolo abbia lati e area razionali. Sia dato infatti un triangolo qualunque in cui i lati a, b, c e l'area S siano razionali; allora saranno pure razionali il suo semipe-

Digitized by Google

rimetro $p = (a + b + c) : 2$ e le tangenti dei suoi semiangoli come risulta dalle note formule $\operatorname{tg}(\alpha/2) = S:[p(p-a)]$ e analoghe per $\operatorname{tg}(\beta/2)$ e $\operatorname{tg}(\gamma/2)$. Inversamente, se i numeri positivi x, y, z, p soddisfacenti alla (2) sono razionali, tali saranno i lati e l'area del triangolo che essi individuano, come risulta evidente dalle (3) e (5). Possiamo dunque concludere il seguente

TEOREMA I. *Tutti i triangoli con lati e area razionali hanno i lati espressi da*

$$(A) \qquad a = p(1 - yz); \quad b = p(1 - zx); \quad c = p(1 - xy)$$

dove x, y, z, p sono razionali positivi scelti ad arbitrio in modo che

$$(B) \qquad xy + yz + zx = 1.$$

In ogni triangolo così individuato, x, y, z misurano le tangenti dei semiangoli, p misura il semiperimetro, p^2xyz misura l'area.

Così la *definizione intrinseca d'un triangolo razionale* si esprime colla condizione che le *tangenti trigonometriche* dei suoi *semiangoli* sieno *razionali.*

È utile notare che il teorema precedente sussiste anche se invece della parola razionali si legga reali.

II. Triangoli con lati ed area interi.

Cerchiamo ora a quali altre condizioni è necessario e sufficiente che soddisfacciano i parametri x, y, z, p del teorema I affinchè il triangolo da essi individuato abbia lati ed area interi cioè sia Eroniano (rispetto all'unità prefissata). Giova a tale scopo premettere il seguente

LEMMA I. *Nei triangoli aventi i lati interi e l'area razionale, se il semiperimetro è intero, tale è l'area; e viceversa.*

Supponiamo infatti che a, b, c, p sieno interi e S razionale; allora il quadrato di S cioè $p(p-a)(p-b)(p-c)$ è intero, perchè è il prodotto di quattro numeri interi; ne segue che S, poichè è razionale, è intero. Inversamente, supponiamo a, b, c, S interi; allora p non può essere frazionario perchè

Digitized by Google

se fosse $p = m:n$ con m, n interi, primi tra loro e $n > 1$, il quadrato di S diverrebbe $m(m - na)(m - nb)(m - nc) : n^4$ che è una frazione irriducibile; ne seguirebbe che S, poichè è razionale, è frazionario, contro l'ipotesi.

Da questo lemma deriva che una prima condizione necessaria perchè un triangolo determinato a norma del teorema I, abbia lati e area interi è che p sia intero. Un'altra condizione necessaria è che siano interi a, b, c, cioè i prodotti

$$p(1 - yz); \quad p(1 - zx); \quad p(1 - xy).$$

Ora le espressioni

$$(C) \qquad 1 - xy, \quad 1 - zx, \quad 1 - xy$$

sono razionali (tali essendo x, y, z), positive, minori di 1 [infatti essendo $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, dalla (B) risulta che $0 < xy < 1$, da cui $1 > 1 - xy > 0$, e similmente per yz e zx], e quindi frazionarie; dunque affinchè i loro prodotti per il numero intero p siano interi è necessario che p sia un intero multiplo del loro min. com. denomin. Questa condizione necessaria affinchè lati e area siano interi è anche sufficiente; se infatti p è un intero multiplo del m. c. d. delle (C), allora i suoi prodotti per le (C) sono interi e tale è anche S, in conseguenza del lemma. Si può dunque concludere il seguente

Teorema II. *Tutti i triangoli con lati ed area interi hanno i lati espressi da*

$$(A) \qquad a = p(1 - yz); \quad b = p(1 - zx); \quad c = p(1 - xy)$$

dove x, y, z sono razionali positivi scelti ad arbitrio in modo che

$$(B) \qquad xy + yz + zx = 1$$

e p è un intero positivo multiplo del min. com. denomin. delle frazioni

$$(C) \qquad 1 - yz; \quad 1 - zx; \quad 1 - xy.$$

In ogni triangolo così individuato, x, y, z esprimono le tangenti dei semiangoli; p il semiperimetro; p^2xyz l'area.

Digitized by Google

III. Triangoli Eroniani minimi. Terne ordinate.

Dal teorema II risulta che affinchè un triangolo sia Eroniano è anzitutto necessario che i numeri x, y, z siano razionali positivi soddisfacenti alla (B). I valori così scelti per x, y, z individueranno gli angoli α, β, γ del triangolo. Risulta pure che allora il semiperimetro p del triangolo può assumere infiniti valori e che questi sono tutti interi multipli del min. com. denom. delle (C). Dunque il *minimo* valore che può assumere p è questo m. c. d. e ad esso corrisponderà un triangolo che sarà il *minimo* fra tutti i triangoli Eroniani (simili tra loro) aventi gli angoli α, β, γ.

Si intuisce che i lati di questo triangolo minimo siano primi tra loro. Per dimostrarlo premetterò il seguente

LEMMA II. *Se quattro numeri positivi sono interi dispari e uno di essi è uguale alla somma degli altri, la radice quadrata del loro prodotto è un numero irrazionale.*

Siano $2h+1$, $2k+1$, $2l+1$, $2m+1$ i quattro numeri dati e il primo sia uguale alla somma degli altri, il che equivale a dire che

$$h+k+l+m=2(k+l+m)+1$$

come è facile riconoscere. Avremo allora successivamente

$$(2h+1)(2k+1)(2l+1)(2m+1)=[4hk+2(h+k)+1]\times$$
$$\times[4lm+2(l+m)+1]=4M+2(h+k+l+m)+1=4N+3$$

dove M e N sono interi positivi, dei quali è inutile indagare ulteriormente il valore. Il prodotto P dei numeri dati è dunque della forma $4N+3$ e quindi non può essere il quadrato di un numero intero (perchè se un numero intero è pari, il suo quadrato ha la forma $4N$; se è dispari il suo quadrato ha la forma $4N+1$). Ne segue che la radice quadrata di P è irrazionale.

Per dimostrare ora che i lati a, b, c di un triangolo Eroniano minimo sono primi tra loro, si osservi prima che, essendo questi lati espressi dai numeri

$$(A) \qquad p(1-yz);\quad p(1-zx);\quad p(1-xy),$$

Digitized by Google

dove p è il minimo com. den. delle frazioni

$$(C) \qquad 1-yz;\quad 1-zx;\quad 1-xy,$$

il loro mass. com. divisore dev'essere primo con p perchè se i numeri (A) e p avessero qualche divisore comune $n>1$, allora sarebbero interi i numeri

$$\frac{p}{n}(1-yz);\quad \frac{p}{n}(1-zx);\quad \frac{p}{n}(1-xy);\quad \frac{p}{n};$$

cioè p/n sarebbe un intero minore di p e tale che moltiplicato per le frazioni (C) darebbe dei numeri interi, il che è contrario alla ipotesi che p sia il minimo com. den. delle (C).

Si rifletta poi che dovendo il M. C. D. dei lati (A) dividere la loro somma che è $2p$, ed essendo (come abbiamo ora dimostrato) primo con p, deve dividere 2; ma esso non può essere 2 perchè se 2 fosse fattore di a, b, c, e primo con p, ne seguirebbe che a, b, c, sono pari e p dispari cosicchè $p, p-a, p-b, p-c$ sarebbero tutti dispari e poichè $p=p-a+p-b+p-c$, in virtù del lemma II, la radice quadrata del loro prodotto sarebbe irrazionale, mentre per ipotesi è intera.

Ne deriva che il M. C. D. di a, b, c è 1.

La considerazione dei triangoli Eroniani minimi è importante anche per il calcolo pratico perchè permette di limitare questo alla determinazione dei soli triangoli Eroniani minimi, essendo poi agevole ricavare da essi tutti gli altri.

Per il calcolo pratico è pure importante la seguente osservazione: quando mediante le (A) si è calcolata una terna a, b, c (Eroniana, ma l'osservazione vale per una terna qualunque), può darsi che essa non differisca da un'altra già calcolata prima se non per l'ordine di a, b, c, e quindi può darsi che si calcolino fino a *sei* terne *diverse* (tante quante sono le permutazioni di a, b, c) le quali diano origine allo *stesso* triangolo. Ciò si può evitare scegliendo i parametri delle (A) in modo che a, b, c siano disposti in ordine di grandezza ad es. decrescente cioè in modo che $a \geq b \geq c$. Basta per questo aggiungere alla (B) le condizioni $x \geq y \geq z$. Queste infatti equivalgono alle $a \geq b \geq c$ come si ricava subito dalle (A) o anche pensando al significato geometrico delle x, y, z. I risultati di questo paragrafo si possono riassumere nel seguente

Digitized by Google

TEOREMA III. *Tutte le terne Eroniane irriducibili e decrescenti sono costituite dai numeratori delle frazioni*

$$(C) \qquad 1-yz;\quad 1-zx;\quad 1-xy$$

ridotte al loro min. com. den., dove x, y, z sono razionali positivi scelti ad arbitrio in modo che

$$xy+yz+zx=1;\quad x\geq y\geq z.$$

Nel triangolo i cui lati costituiscono una qualunque di queste terne, x, y, z esprimono le tangenti dei semiangoli, il min. com. den. delle (C) esprime il semiperimetro p, e p^2xyz esprime l'area.

Questo teorema dà come caso particolare la risoluzione in numeri interi della ben nota equazione Pitagorica $a^2=b^2+c^2$, col vantaggio che le terne ottenute sono irriducibili e ordinate; se infatti in esso si pone $x=1$, allora $\alpha=\pi:2$, quindi ognuno dei triangoli determinati è rettangolo e i suoi lati a, b, c soddisfanno alla relazione $a^2=b^2+c^2$.

IV. Proprietà dei triangoli razionali. Problemi relativi ad essi.

I triangoli studiati possiedono molte proprietà: per es. in essi sono razionali le altezze, i raggi dei circoli circoscritto, iscritto ed ex-iscritti, l'area del triangolo ortico, nonchè molti altri segmenti ed aree; e non sarebbe privo d'interesse, sebbene io lo tralasci, farne uno studio sistematico in base alle formule da me date. Così pure queste si prestano assai bene a risolvere svariati problemi relativi ai triangoli razionali ad es. quelli trattati dallo Schubert nel volume sopra citato dove egli ricerca i triangoli Eroniani in cui sono razionali o intere anche le mediane e le bisettrici ed estende il concetto di Eroniano ai parallelogrammi e ad altri poligoni e poliedri. Altri problemi interessanti, dei quali alcuni assai facili, altri conducenti a questioni talora ardue di teoria dei numeri sono: la ricerca dei triangoli Eroniani in cui gli elementi siano legati tra loro da relazioni date (come ad es. quelle che i lati siano in progressione aritmetica o espressi da numeri

Digitized by Google

interi consecutivi), l'estensione del concetto di Eroniano ai triangoli sferici, ecc. ecc.

Ma io mi limiterò qui a risolvere un solo problema che nella risoluzione offre qualche aspetto curioso abbastanza interessante e che non mi consta sia stato fin qui trattato, quello di determinare i triangoli Eroniani aventi area e perimetro espressi dallo stesso numero. Questo problema verrà ritenuto dapprima come un problema *aritmetico*, ma più avanti ne rileverò il significato *geometrico* (intrinseco).

Si abbia un triangolo Eroniano determinato a norma del teorema II; affinchè il suo perimetro $2p$ e la sua area p^2xyz siano espressi dallo stesso numero, occorre e basta che

$$p^2xyz = 2p \quad \text{cioè} \quad pxyz = 2 \tag{1}$$

da cui si rileva

$$pyz = 2:x; \quad pzx = 2:y; \quad pxy = 2:z.$$

I primi membri di queste eguaglianze equivalgono rispettivamente a $p-a$, $p-b$, $p-c$ [formule (4) del § 1] e quindi sono numeri interi; tali saranno dunque anche i secondi membri e chiamandoli rispettivamente l, m, n, risulterà

$$x = 2:l; \quad y = 2:m; \quad z = 2:n.$$

Per questi valori di x, y, z la relazione (B) del teor. II si trasforma in

$$4(l+m+n) = lmn; \tag{2}$$

la relazione (1) esprimente l'eguaglianza tra area e perimetro si trasforma in $p = lmn:4$ che per la (2) equivale a $p = l+m+n$; e le espressioni (A) dei lati diventano

$$a = m+n; \quad b = n+l; \quad c = l+m. \tag{3}$$

Inversamente, se i lati a, b, c di un triangolo sono espressi dalle (3) dove l, m, n sono interi positivi soddisfacenti alla (2), allora si ha

$$p = l+m+n = lmn:4; \quad p-a = l; \quad p-b = m; \quad p-c = n; \quad S = 2p;$$

cioè il triangolo è Eroniano e ha l'area eguale al perimetro.

Digitized by Google

Affinchè inoltre sia $a \geq b \geq c$, occorre e basta che $l \leq m \leq n$. Così il problema è ridotto alla risoluzione in numeri interi positivi dell'equazione $4(l+m+n) = lmn$, con $l \leq m \leq n$.

Per questo risolviamo l'equazione rispetto a n; si ha

(4) $n = 4(l+m):(lm-4)$ e ponendo $lm-4=h$ cioè $m=(h+4):l$

si ricava

$$n = 4\left(l + \frac{h+4}{l}\right) : h$$

da cui

$$ln = 4 + \frac{4(l^2+4)}{h}.$$

Ponendo poi

(5) $$4(l^2+4):h = k \quad \text{cioè} \quad hk = 4(l^2+4)$$

si avrà

(6) $$ln = 4 + h \quad \text{cioè} \quad n = (k+4):l.$$

Se dunque l, m, n sono interi positivi soddisfacenti all'equazione data, esistono due interi positivi h, k soddisfacenti alle (4), (5) e (6). Inversamente, se si prendono ad arbitrio l'intero positivo l e due interi positivi h e k soddisfacenti alla (5) e tali che tanto $h+4$ quanto $k+4$ siano divisibili per l, allora le (4) e (6) determinano due interi positivi m e n che insieme coll'intero prefissato l danno una soluzione in numeri interi positivi dell'equazione data.

Affinchè $l \leq m \leq n$ occorre e basta che

$$l \leq \frac{h+4}{l} \leq \frac{k+4}{l} \quad \text{cioè} \quad l^2 - 4 \leq h \leq k.$$

Affinchè queste condizioni si verifichino è necessario che

$$l^2 - 4 \leq h \quad \text{e} \quad l^2 - 4 \leq k \quad \text{e quindi che} \quad (l^2-4)^2 \leq hk.$$

Questa, in virtù della (5), equivale a $(l^2-4)^2 \leq 4(l^2+4)$ che, sviluppata, dà $l \leq \sqrt{12}$, ossia, poichè l è intero, $l \leq 3$.

Dunque: tutte le terne di numeri interi positivi l, m, n soddisfacenti all'equazione $4(l+m+n) = lmn$ e tali che $l \leq m \leq n$ si ottengono nel seguente modo.

Digitized by Google

Si scelga ad arbitrio un intero positivo $l \leq 3$, e si calcoli il numero $4(l^2+4)$, scomponendolo poi in tutti i modi possibili nel prodotto di due fattori (interi positivi); fra questi prodotti si prendano tutti e soli quelli in cui ciascuno dei fattori aumentato di 4 è divisibile per l; chiamati h e k $(h \leq k)$ i fattori di uno qualunque di questi prodotti, si ponga $m = (h+4):l$; $n = (k+4):l$. La terna così ottenuta è una di quelle cercate.

Poniamo $l = 1$. Allora

$$4(l^2+4) = 20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5.$$

Ciascuno di questi tre prodotti dà luogo a una soluzione perchè ogni suo fattore aumentato di 4 dà un numero divisibile per $l = 1$. Nel primo prodotto si ha $h = 1$ e $k = 20$ cosicchè $m = (h+4):l = 5$ e $n = (k+4):l = 24$. Dal secondo prodotto si ricava $m = 6$; $n = 14$. Dal terzo $m = 8$; $n = 9$.

Poniamo $l = 2$. Allora

$$4(l^2+4) = 32 = 1 \times 32 = 2 \times 16 = 4 \times 8.$$

Il primo prodotto va scartato perchè il suo fattore 1 aumentato di 4 dà il numero 5 non divisibile per $l = 2$. Dal secondo prodotto si ha la soluzione $m = 3$; $n = 10$. Dal terzo si ha $m = 4$; $n = 6$.

Poniamo $l = 3$. Allora

$$4(l^2+4) = 52 = 1 \times 52 = 2 \times 26 = 4 \times 13.$$

Ognuno di questi prodotti va scartato: il primo e il terzo perchè uno dei loro fattori (qui anzi ciascuno dei due) aumentato di 4 dà un numero non divisibile per $l = 3$; il secondo perchè essendo $h = 2$; $k = 26$, non è soddisfatta la condizione $l^2 - 4 \leq h$ necessaria (vedi sopra) affinchè $l \leq m$, e quindi non ha luogo una nuova soluzione; infatti si troverebbe $l = 3$; $m = 2$; $n = 10$ che già è stata trovata ponendo $l = 2$ e ricavando $m = 3$; $n = 10$.

Concludendo: le soluzioni dell'equazione studiata sono cinque, cosicchè i triangoli Eroniani aventi area e perimetro espressi dallo stesso numero sono in tutto cinque, dei quali è facile calcolare i lati mediante le (3). Essi sono dati dalla

Digitized by Google

seguente tabella in cui è utile osservare che gli ultimi due triangoli sono rettangoli.

l	m	n	a	b	c	$S=2p$
1	5	24	29	25	6	60
1	6	14	20	15	7	42
1	8	9	17	10	9	36
2	3	10	13	12	5	30
2	4	6	10	8	6	24

Nota sul significato geometrico del problema.

Il problema trattato, di ricercare tutti i triangoli Eroniani aventi area e perimetro espressi dallo stesso numero, ha, a prima vista, soltanto un senso *aritmetico*, poichè esso, così enunciato, coincide colla ricerca di tutte le terne di numeri interi positivi a, b, c tali che ognuno di essi sia minore della somma degli altri due e che, posto $a+b+c=2p$, il numero $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ risulti eguale a $2p$. Ma il detto problema ha pure un significato *geometrico*, cioè risponde alla ricerca dei triangoli che hanno una certa proprietà *intrinseca*. Si pensi infatti che, dato un triangolo qualunque (anche non razionale), affinchè la sua area e il suo perimetro risultino espressi dallo stesso numero, *occorre e basta* scegliere come unità di misura dei lati il semiraggio $r/2$ del circolo iscritto (come risulta subito dalla formula $S=rp$); dimodochè supponendo di fare in tutti i triangoli tale scelta per l'unità di misura dei lati, il problema suddetto consiste nel cercare per quali triangoli i numeri esprimenti i lati e l'area risultano interi (per il che basta evidentemente, nell'ipotesi fatta, che risultino interi i lati). Cioè insomma: ***la ricerca dei triangoli Eroniani aventi area e perimetro espressi dallo stesso numero coincide colla ricerca dei triangoli in cui i rapporti dei lati al semiraggio del circolo iscritto sono numeri interi.***

Genova, R. Istituto Tecnico.

CARLO ROVETTI

Digitized by Google

A proposito di « Due osservazioni didattiche » di A. Padoa

Le « Due osservazioni didattiche » del prof. ALESSANDRO PADOA, pubblicate nell'ultimo fascicolo del Periodico, ci hanno procurato un rilievo del prof. BRUNO TEDESCHI che — nell'interesse della cosa — tiene a far notare quanto segue:

1) Sulla regola di DE L'HOSPITAL si danno nei Corsi di Analisi infinitesimale resultati più generali di quello contenuto nella formula dell'A., pei quali è essenziale la generalizzazione di CAUCHY del teorema di ROLLE.

2) Il metodo usato nella dimostrazione della formula del prof. Padoa si trova anche negli « Esercizi e note critiche di Calcolo infinitesimale » di E. PASCAL (ed. Hoepli, 1895, pag. 244).

LA REDAZIONE

Digitized by Google

Questioni

Questioni proposte.

134. Dato un angolo acuto, formato da due raggi a e b, si assuma un punto A_0 su a. Da A_0 si abbassi la perpendicolare a b, e sia A_1 il piede di questa; da A_1 si abbassi la perpendicolare ad a, e sia A_2 il piede di questa; e così di seguito. Indicata con l_i la lunghezza del segmento $A_{i-1}A_i$ si calcoli la somma $\sum_{i=1}^{\infty} l_i$.

G. BELARDINELLI

135. Dato un prisma indefinito avente per sezione normale un triangolo di lati a, b, c, segarlo con un piano in modo che la sezione sia un triangolo equilatero. Risoluzioni ed eventuali indicazioni bibliografiche della questione.

E. MACCAFERRI

136. In un piano verticale un filo di lunghezza l, flessibile ed inestendibile (e di peso trascurabile), passando sopra una piccola carrucola, collega due pesi P e Q. Il peso Q scorre sopra una curva nota del piano (verticale): determinare la curva, dello stesso piano, su cui deve scorrere Q affinchè l'equilibrio del sistema sia indifferente. Esemplificare con qualche caso particolare notevole.

M. MANARINI

137. È noto che due involuzioni ω_1 e ω_2 sono permutabili quando le coppie dei relativi punti uniti si separano armonicamente; in questo caso la proiettività prodotto $\pi = \omega_1\omega_2$ è una involuzione.

Ora si domanda come debbano presentarsi le dette due coppie di punti doppi perchè la π sia ciclica (in questo caso il gruppo generato dalle ω_1 e ω_2 è isomorfo al gruppo della doppia piramide).

O. C.

Digitized by Google

Risposte.

Risposta alla questione n. 123.

Assumiamo per semplicità il punto O come origine di un sistema di assi ortogonali, rispetto al quale sia

$$(1) \qquad f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

l'equazione della conica C.

Siano $(X, Y, 1)$ le coordinate omogenee del punto O' che con O e le intersezioni A, A' della retta OO' con la conica C dia il birapporto k.

Le coordinate omogenee dei punti A, A' sono della forma ρX, ρY, $\rho + 1$ ove il coefficiente ρ deve soddisfare all'equazione

$$f(\rho X, \rho Y, \rho + 1) \equiv f(X, Y)\rho^2 + 2(a_{13}X + a_{23}Y + a_{33})\rho + a_{33} = 0.$$

Per l'invarianza del birapporto con proiezioni e sezioni, il birapporto k è dato da quello delle ascisse dei punti, che, come è noto, è dato dal rapporto dei valori del parametro ρ dati dalla precedente equazione. Cioè

$$k = \frac{-(a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}) + \sqrt{(a_{13}X + a_{23}Y + a_{33})^2 - a_{33}f(X, Y)}}{-(a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}) - \sqrt{(a_{13}X + a_{23}Y + a_{33})^2 - a_{33}f(X, Y)}}$$

dalla quale facilmente si ha come equazione del luogo di O'

$$(2) \qquad a_{33}(1 + k)^2 f(X, Y) - 4k(a_{13}X + a_{23}Y + a_{33})^2 = 0$$

la quale rappresenta una conica.

Se $k = -1$ la precedente si riduce a

$$(3) \qquad (a_{13}X + a_{23}Y + a_{33})^2 = 0$$

che rappresenta la polare del punto O, rispetto a C, contata due volte; e ciò si sapeva.

Se $k = 1$ si ha

$$(4) \qquad a_{33}f(X, Y) - (a_{13}X + a_{23}Y + a_{33})^2 = 0$$

che è l'equazione complessiva delle tangenti alla conica C mandate da O.

Volendo trovare le intersezioni delle due coniche bisognerebbe far sistema della (1) e della (2); ma moltiplicando per $a_{33}(1 + k)^2$ i due membri della (1) e sottraendo poi da questi i corrispondenti della (2), il sistema delle (1) e (2) è equivalente a quello formato da una qualunque delle equazioni delle coniche e dalla equazione, ottenuta per sottrazione come si è detto, la quale coincide con la (3).

Digitized by Google

Quindi le intersezioni delle due coniche sono le stesse di quelle della polare di O rispetto a C, contata due volte, e di C.

Mandando le tangenti alla nuova conica da O si ritrova la (4) come equazione complessiva.

Siccome le intersezioni sono doppie le due coniche sono bitangenti nei punti in cui la polare di O le interseca.

Questa risposta, unica pervenutaci, è dovuta al prof. A. SICILIANO.

Risposta alla questione n. 131.

Integro, 4 volte successive, rispetto x i due membri dell'identità

$$(1) \qquad (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

e ottengo

$$(2) \qquad \frac{n!}{(n+4)!}(1+x)^{n+4} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{i!}{(i+4)!} x^{i+4} + \sum_{m=1}^{3} c_m \frac{x^{4-m}}{(4-m)!} + c_4 .$$

Facendo $x=0$ ottengo successivamente, dopo ciascuna integrazione, i valori di c_m $(m=1, 2, 3, 4)$

$$c_m = \frac{n!}{(n+m)!} .$$

Divido i due membri della (2) per x^2; eseguisco la derivata seconda rispetto x; dò ad x il valore 1 e con poche riduzioni arrivo a

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+3)(i+4)} \binom{n}{i} = \frac{2^{n+2}(n^2-n+4)-2n-14}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} .$$

Questa soluzione è dovuta al prof. A. BARZAGHI. Altre, ottenute con procedimenti analoghi, ci pervennero dai professori A. CONSIGLIO, M. MORINI, F. SBRANA, V. ARCIDIACONO, il quale unisce anche una determinazione diretta del valore della serie.

Per mancanza di spazio rimandiamo al prossimo fascicolo le altre risposte pervenuteci.

Digitized by Google

Atti della Società Italiana di Scienze fisiche e matematiche « Mathesis »

VERBALI DELLE SEZIONI

SEZIONE MILANESE

Adunanza del 18 novembre 1926.

La Sezione si è riunita alle ore 17 in un'aula del R. Politecnico. Presiede il prof. Vivanti. Sono presenti i soci: Ambrosoli, Angelini, Baffi, Bandini, Cassina, Chisini, Cisotti, Finzi, Gabba, Levi, Maggi, Marcaletti, Masotti, Morra, Moretti, Pastori, Pedote, Piazza, Rossi, Spera, Vivanti.

L'ing. Spera desidera che nel verbale della seduta precedente (10 giugno 1926) la frase: « L'ing. Spera illustra un metodo atto a determinare per tentativi le radici reali di un'equazione di terzo grado », venga così modificata: « L'ing. Spera illustra un *suo* metodo atto a determinare ecc. ecc. ». Il verbale della seduta precedente, con la variazione suggerita dall'ing. Spera, è approvato.

Il Segretario legge il bilancio della Sezione, che al 15 novembre 1926 riduce il disavanzo al 15 novembre 1925 da L. 352,95 a L. 321,75. Il bilancio è approvato.

Essendo scaduto l'Ufficio di Presidenza, il prof. Vivanti invita i soci a procedere alla elezione relativa. Per acclamazione il prof. Vivanti è rieletto Presidente, il prof. Bandini Vice-Presidente, il prof. Finzi Segretario.

La Sezione affida alla Presidenza il compito di concretare il programma per le prossime riunioni.

Il prof. Vivanti rivolge ai colleghi le seguenti parole:

« Il carattere culturale riconosciuto alla nostra « Mathesis », mentre ne assicura l'esistenza, impone a noi l'obbligo di dare ai

Digitized by Google

nostri lavori un indirizzo più deciso, restringendolo al campo della scienza e dell'insegnamento, nella fiducia che la Presidenza generale terrà presente come gli interessi della scuola siano strettamente legati al benessere e alla tranquillità d'animo degli insegnanti. Le nostre riunioni dovranno pertanto proporsi il triplice scopo di rendere sempre più intime e cordiali le relazioni tra professori universitari e medi, di offrire a questi un mezzo facile di seguire i progressi della scienza, e di aprire il campo ad utili discussioni sulle più importanti questioni didattiche. Sarà opera della Presidenza predisporre un programma di conferenze su svariati ed interessanti argomenti di matematica e di fisica, nè essa si lascierà sfuggire l'occasione di continuare a far sentire ai colleghi la voce di illustri scienziati italiani o stranieri che si trovassero di passaggio a Milano. Essa però non si sentirebbe incoraggiata nella sua opera, se, come per varie circostanze è avvenuto l'anno passato, fosse scarso il numero dei soci presenti alle adunanze. Nutriamo pertanto fiducia che i Colleghi, animati come sono dall'amore per la scuola e per la scienza, sacrificheranno di buon grado un'ora del meritato riposo per prender parte alle nostre riunioni mensili, mentre dal canto nostro metteremo ogni cura perchè esse abbiano a riuscire non meno interessanti che utili ».

La seduta ha termine alle ore 18,30.

Il Segretario B. FINZI — *Il Presidente* G. VIVANTI

ELEZIONI DEL CONSIGLIO DIRETTIVO per il biennio 1927-28.

Ai primi del mese di novembre il Consiglio Direttivo della « Mathesis » ha bandito fra i soci le elezioni del nuovo C. D. per il biennio 1927-28, diramando la seguente circolare:

« *Egregio Consocio.* Il Consiglio direttivo della Società di Scienze Fisiche e Matematiche « Mathesis », in conformità alle norme dello Statuto, invita i Soci a procedere a nuove elezioni delle cariche sociali per il biennio 1927-28. Pertanto Ella è pregata a rinviare l'unita scheda di voto entro il giorno 25 novembre.

Il Consiglio vorrebbe potere annunciare in questa occasione di avere conseguito, almeno in parte, gli scopi segnati dai nostri Congressi e dai voti delle Sezioni, per ciò che riguarda le condizioni fatte agli insegnamenti di Matematica e di Fisica in con-

Digitized by Google

seguenza dell'abbinamento delle due discipline. Ma sebbene a tale scopo abbia lavorato assiduamente, ottenendo la adesione di personalità cospicue e illustrando in diversi modi alle competenti Autorità le ragioni che suffragano le nostre proposte, ha il rammarico di non essere ancora riuscito ad un risultato positivo. Non vogliamo dissimulare ai Colleghi che gli ostacoli da vincere sono divenuti in quest'anno più gravi di quello che apparissero l'anno scorso quando un provvedimento studiato d'accordo col Ministero della P. I. aveva avuto già l'adesione di massima del Ministero del Tesoro ed era sul punto di essere tradotto in disposizione legislativa. Anzitutto il vostro C. D. che dal voto del Congresso di Milano era chiamato a sostenere una riforma del principio di abbinamento delle Cattedre di Fisica e di Matematica, ha dovuto constatare che le direttive generali della politica scolastica, che ha il suo più alto organo interpretativo nel C. S. della P. I., sono oggi anche più strettamente legate a quel principio. Perciò il Vostro C. D. ha assunto la responsabilità di non insistere sulla questione degli abbinamenti per concentrare la sua azione sul problema degli orarî; e della necessità di ridurre l'aggravio imposto agli insegnanti è riuscito finalmente a convincere anche i fautori degli abbinamenti, che invero da tale riduzione possono ripromettersi un esperimento delle loro idee in condizioni più favorevoli.

Ma non basta avere rimosso le difficoltà in qualche modo pregiudiziali allo scopo che più urge raggiungere: resta la difficoltà di convincere l'attuale Ministro del Tesoro, che, per fronteggiare la crisi monetaria mondiale, deve porre oggi al Paese le restrizioni più rigorose.

Qui conviene anche rilevare che un apposito articolo del nuovo Regolamento sindacale fa divieto agli impiegati dello Stato di riunirsi in associazioni per la tutela d'interessi di classe, ed anzi richiede che ogni associazione di impiegati sia debitamente autorizzata dal Governo. Sull'applicabilità di codesta disposizione alla Società « Mathesis » il nostro Consiglio ha consultato ufficiosamente le competenti Autorità ed ha fatto valere una interpretazione dello Statuto per cui la Società nostra è da ritenere, per natura e fondazione, come un semplice organo di cultura scientifica e didattica. Ma ognun vede quale sia il significato di codesta interpretazione, che forse converrà fissare più precisamente con qualche modificazione formale dello Statuto e che ad ogni modo dovrà seguirsi, onde la nostra Società possa continuare la sua attività per il bene della Scuola Nazionale. I dirigenti della « Mathesis » si inspireranno sempre alle esigenze scientifiche e didattiche e al proprio personale convincimento per prospettare

Digitized by Google

al Governo la necessità di provvedimenti su cui concordano tutte le Facoltà scientifiche d'Italia; ma per quanto concerne i sacrifici e le aspirazioni degli insegnanti che a tali esigenze si accompagnino, questi interessi di classe potranno essere legittimamente tutelati solo nelle forme e attraverso gli organi consentiti dal nuovo assetto sindacale dello Stato.

Anche nei limiti dei nuovi ordinamenti l'azione della « Mathesis » si eserciterà nel senso più utile, ove i suoi dirigenti siano convinti assertori degli ideali scientifici e didattici da cui l'Associazione nostra trae un prestigio ormai trentennale. Frattanto, desideriamo che il governo della Società sia affidato dai Colleghi a nuovi dirigenti, con l'augurio che ad essi sia dato di condurre a compimento l'opera da noi intrapresa ».

La circolare portava come termine per l'elezione il 25 novembre, ma — tenuto conto d'un certo ritardo sopravvenuto nelle circolari medesime — il Presidente ha creduto opportuno di accogliere come valide le schede pervenutegli fino al 1° dicembre, giorno in cui si è riunita la Commissione di scrutinio (naturalmente le schede pervenute dopo questo giorno non hanno potuto essere prese in considerazione e sono state distrutte).

Verbale di scrutinio.

Il giorno 1 dicembre 1925 i soci prof. Tullio Levi-Civita, dott. Giovanni Ricci e dott. Maria Teresa Zapelloni, delegati dalla presidenza della « Mathesis » hanno proceduto allo spoglio delle schede pervenute alla presidenza per l'elezione del nuovo Consiglio direttivo.

La votazione ha avuto il seguente risultato: Votanti 317. Schede nulle 4, di cui tre perchè prive del nome del mittente (esse provengono una da Modena, una da Milano e una da Catania) e la quarta perchè reca la firma del mittente.

Risultarono eletti: categoria *a*) Federigo Enriques con voti 310; categoria *b*) Orso Mario Corbino con voti 304; categoria *c*) Umberto Bini con voti 303, Pier Andrea Fontebasso con voti 307, Luigi Galvani con voti 304, Mario Vecchi con voti 304, Virgilio Monti con voti 305, Giulio Bisconcini con voti 308, Enrico Persico con voti 306.

Presidente: Federigo Enriques con voti 307.

Ebbero voti: Castelnuovo Guido 2, Conti Alberto 2, Levi-Civita Tullio 2, Severi Francesco 2, Amici 1, Amoroso 1, Amaldi 1, Bagnera 1, Benedetti 1, Bortolotti 1, Calvitti 1, Candido 1, Can-

Digitized by Google

tone 1, Chisini 1, Gambioli 1, Lazzeri 1, Maggi 1, Marcolongo 1, Marseguerra 1, Montesano 1, Nannei 1, Pincherle 1, Puccianti 1, Romanazzi 1, Rosati 1, Sannia 1.

Per la presidenza ebbero voti Corbino 1, Marcolongo 1, Volterra 1.

Alcuni di questi voti avrebbero dovuto tuttavia essere annullati perchè in sopranumero nella rispettiva categoria.

f.to: T. Levi-Civita
Maria Teresa Zapelloni
Giovanni Ricci

Hanno votato i seguenti soci: Abbati N., Aliprandi G., Ambrosoli C., Angeli L. R., Baffi C., Balestra G., Barbieri A., Bartolo M., Bassi P., Battaglia L., Beani L., Bedarida J., Bedarida M., Bellesini L., Benedetti P., Berta C., Bertini E., Berzolari L., Bettazzi R., Bezzi C., Biggioggero G., Bini U., Bisconcini G., Boaga G., Boccardini G., Bonadonna G., Bonizzi W., Bontadi L., Borgioli A., Borini B., Borio A., Borriero A., Bortolotti Enea, Bortolotti Ettore, Bottari A., Boscolo G., Bosi L., Brunè C., Bruno G., Bucalossi M., Bucca R., Buonocore L., Burnengo G., Butti T., Caldonazzo B., Calonghi M., Calvi A., Caminati P., Campedelli L., Campetti M., Candido G., Canevari A., Capone O., Cappelletti G., Caprio N., Carlini L., Carrelli A., Casamassima M., Caselli V., Cassina U., Cassinis G., Castaldo P., Castelli P., Catalano G., Caterino E., Cavallaro A., Cavallaro V., Cavallero-Forno V., Ceccherini F., Cercignani E., Ceretti U., Certo L., Chiari A., Chiellini A., Chigiotti C., Chini G., Chini M., Chisini O., Ciani E., Ciliberti A., Cipolla M., Cisotti U., Civinini L., Clarke F., Clausi-Schettini M., Comessatti A., Comi T., Composto S., Consiglio R., Conte T., Crudeli U., Dalla Rovere S., Daniele E., D'Arcais F., Del Bono N., Dellacasa L., Del Lungo C., De Nunzio L., Di Dia G., Di Gennaro S., Di Maio E., Doria G., Dusi T., Emanuelli P., Esperti V., Faggioli V., Fano G., Fellini D., Feo S., Ferrari M., Ferrario T., Ferreri A., Finzi B., Finzi S., Fiore C., Fiorentini P., Florio S., Foà F., Fontebasso A., Fortini R., Furlani G., Gabba L., Galleno P., Gallico V., Gallina G., Gallucci G., Galvani L., Garibaldi C., Garzillo A., Gazzini R., Ghezzi T., Gianasso G., Gianfelici B., Giannarelli R., Gigli D., Giraud G., Gobesso G., Godeaux L., Gonella G. B., Guareschi G., Giordano G., Guerre E., Ingrao G., Ingrassia M., Ippolito F., La Barbera A., Laterza V., Lazzeri G., Lauro L., Leoni C., Levi B., Levi-Civita T., Licini A., Loglio A., Lombardo A., Longo C., Lo Primo D., Lorenzola P., Loria G., Lo Vetere G., Lucifora G., Licini A., Maggi A.,

Digitized by Google

Magnaghi-Angiolini A., Manarini M., Marcaletti M., Marengoni A., Marcolongo R., Marcone A., Marini D., Maroni A., Martines M., Martinetti V., Martini F., Masetti M., Massiroli A., Masotti A., Mastromauro V., Mayr G., Mazza C., Mazzelli C., Mazzeri G., Melonaz, Mercogliano D., Merola M., Meschia G., Mezzacapo D., Minosi G., Mirto M., Misani M., Modona-Neppi A., Montanari M., Montesano D., Monti G., Morra F., Murer A., Nadalini G., Narcisi R., Natucci A., Neri G., Nicoletti O., Nigro G., Nobile V., Nordio A., Notari-Cuzzer V., Orlandi O., Oseletto T., Padoa A., Paglieri B., Palatini F., Palazzo E., Palomba G., Palermo D., Pampana G., Pampanini M., Parodi R., Partengo C., Pascal N., Pasotti E., Pastori M., Peano G., Pedote G., Penna P., Pepoli A., Perez F., Pesci G., Pession B., Piazza S., Picotti M., Pignagnoli S., Piva N., Piva A., Poato G., Polidori C., Pomarici C., Pomini O., Pontremoli A., Porpora B., Praolini O., Predella L., Proli C., Quintili P., Raimondi E., Ramorino A., Raseri L., Ravotti V., Reale G., Regatti R., Repetto G., Ricci G., Rigo G. B., Ripamonti M., Rodotà C., Rosati C., Rossetti, Rossi P., Rovetti C., Ruggero C., Sabbatini C., Sabello C., Sadorosky C., Sadun C., Saladino L., Sandri A., Sansone G., Santangelo A., Sartori A., Sbrana U., Scarpa C., Senatore V., Serosoppi P., Severini G., Sittignani M. G., Soldati S., Solustri A., Stagno M., Stanghellini U., Stanzani R., Stecker U., Supino G., Susani A., Tagliarini R., Talamo L., Tata G., Tavani M., Temussi S., Terracini A., Tesorone R., Timpanaro S., Tizzani G., Tocchi L., Togliatti E., Tonelli F., Tonini E., Toscano L., Traverso N., Trevisan E., Tricomi F., Turchetti M., Vallauri E., Vannini T., Ventriglia M., Verdi M., Vischioni G., Vicenzoni L., Vitali G., Vivanti G., Vizzini G., Wittes M., Zambler P., Zapelloni M., Zavertani A., Zencovich V., Zettini B.

ATTI DEL CONSIGLIO DIRETTIVO

Il C. D. in cui la Società ha voluto riconfermare la propria fiducia, riunitosi per prendere atto del risultato delle elezioni, constatando che la Società non ha voluto secondare il suo desiderio di affidare ad altri il governo della « Mathesis » ha creduto suo dovere di accettare il mandato ricevuto non potendosi assumere la responsabilità di provocare una crisi sociale nelle circostanze difficili che sono state segnalate.

Direttore responsabile: OLIVIERO FRANCHI

Bologna 1927 - Cooperativa Tipografica Azzoguidi

Digitized by Google

che contraddistingue i triangoli di ciascuno dei tre gruppi: come resultato si ha una proposizione che può essere verificata coll' esperienza.

Un' operazione analoga si ha da compiere in tutti i casi analoghi, se è posto il problema di « definire il concetto che risponde alla qualità comune e caratteristica d' una data classe di oggetti ». Così appunto quando si tratta delle « specie » animali e vegetali.

La ricerca d' una definizione per le qualità morali, cui sono rivolti molti dialoghi platonici, procede secondo lo stesso schema. Dal punto di vista logico il problema della definizione viene posto come segue: è dato un concetto mediante la sua *estensione* (cioè dando la classe degli oggetti che vi corrispondono), si chiede di assegnare le proprietà che valgono a caratterizzarlo dal punto di vista della *comprensione*. Questo senso del problema viene messo accortamente in luce nei citati dialoghi, ove Socrate suole spesso rifiutare la prima risposta che si dà alla sua domanda della definizione, dicendo che si offrono molte cose (gli oggetti della classe o i gruppi che la compongono) in cambio d' una sola, ossia di quel che forma l' unità del concetto.

III. Il lavoro costruttivo della mente nella definizione.

Ora conviene esaminare ciò che la mente costruisce o pensa come costruito, nella ricerca della definizione. Anzitutto è degno di rilievo il fatto che, in tutti gli esempi più comuni, la definizione non porge affatto la proprietà caratteristica degli enti od oggetti dati nell' esperienza, ma ne estende la classe mercè la concezione d' una infinità di enti possibili, che vi si aggregano. Così quando diamo delle figure triangolari, la definizione del « triangolo » estende la classe data, mercè la considerazione di tutti i triangoli possibili.

Benchè in una maniera alquanto imprecisa, si può dire che il concetto cercato nella definizione (la proprietà caratteristica *essenziale*) mira a cogliere quel che vi è di *uno* nella *molteplicità* dei dati.

Digitized by Google

Ma *unità* e *pluralità* non sono tanto proprietà degli enti reali in sè, quanto modi di considerare le cose. Dipende dalla nostra mente, e dagli scopi che essa si propone, di parlare d' una « molteplicità » di alberi ovvero d' « una » foresta, di « più case » riunite in un gruppo, ovvero di « un corpo di fabbrica », eventualmente di « una strada » e di « una città ».

Nondimeno a questa libertà del pensiero si accompagna la tendenza ad unificare gli oggetti della realtà; tendenza che assume un' espressione caratteristica in rapporto alla possibilità di pensare gli oggetti dati come appartenenti ad un *continuo*. Così appunto PARMENIDE d' Elea, esaminando se la materia estesa costituisca una molteplicità di enti o un ente solo, risolve la questione nel senso dell' unità, perchè il suo assunto d' una materia primitiva impenetrabile, priva di differenze qualitative e senza vuoti, non dà luogo a discontinuità che valgano a staccare un qualche pezzo di materia dalla materia circostante.

Il problema della classificazione *naturale* delle cose, e segnatamente la domanda se « esistano » veramente le « specie », viene a prendere qui un senso ben definito. Gli individui — piante, animali ecc. — d' una specie, sono concepiti come realizzazioni particolari d' un tipo, che dipende da un certo numero di parametri variabili in una maniera continua. Appunto perchè possiamo teoricamente o mentalmente passare con variazione continua da un individuo ad un altro, concepiamo, nel nostro pensiero, l' unità della specie. Il criterio della classificazione sistematica della zoologia — per cui si attribuiscono alla stessa specie animali suscettibili di unirsi nella generazione di esseri fecondi — vale, in qualche modo, a conferire un significato reale a codesta continuità. Per contro le discontinuità, che separano le specie l' una dall' altra, costituiscono un limite alla concezione unitaria delle forme organiche: solo la teoria dell' evoluzione d' un LAMARK o d' un DARWIN riesce a superare questo limite; ma — per il fatto di stabilire un passaggio continuo tra le dette forme — viene interpretata, dai custodi della dottrina tradizionale, come una « negazione delle specie ».

Digitized by Google

IV. Classificazione naturale e gruppi di trasformazioni.

Le precedenti riflessioni ci conducono a spiegare, in un linguaggio chiaro per il pensiero matematico, i termini del problema della definizione, quale esso vien posto in generale nella scienza classificatoria. E c'indicano così anche il significato di quelle circostanze di fatto che consentono alla costruzione di concetti aderenti alla realtà scientifica (rigetto di classificazioni *artificiali,* e ricerca di classificazioni *naturali*).

Si assuma come data una varietà (genere) di enti od oggetti, i quali dipendano da parametri variabili in modo continuo e da caratteri discontinui: questa varietà consterà dunque di molteplici classi (specie), ciascuna continua in sè, ma separata per qualche discontinuità dalle altre. « Definire » importa assegnare i caratteri discontinui che valgono a distinguere una classe dalle rimanenti; questi caratteri vengono concepiti come « *qualità* » comuni agli oggetti della classe medesima.

Nei problemi concreti cui dà luogo la scienza classificatoria, la discriminazione delle qualità sensibili atte a figurare come caratteri della classe o specie, non è senz'altro evidente. P. es. il colore del pelo d'un animale è una qualità sensibile che a prima vista potrebbe essere assunta come essenziale per la classificazione zoologica: soltanto l'osservazione approfondita ci avverte trattarsi d'un carattere superficiale, che non rompe la continuità della specie.

In questo senso sono da interpretare le consuete norme di considerare sempre caratteri *essenziali,* o di cercare le *intime* affinità o somiglianze degli individui che si è preso a classificare. Tali norme restano necessariamente imprecise, in ragione della circostanza che la continuità della specie non appartiene veramente alla classe data nell'esperienza concreta, bensì piuttosto alla nostra rappresentazione immaginativa di questa classe, che tende a colmare le lacune con « individui possibili ».

Si riesce tuttavia a conferire un significato più preciso alle esigenze scientifiche che qui si hanno in vista, introdu-

Digitized by Google

cendo il concetto delle *trasformazioni*. Il legame genetico offre appunto alla sistematica zoologica l'idea che gl'individui d'una stessa specie possano ottenersi l'uno dall'altro mediante una trasformazione, quale è la « generazione possibile ».

I movimenti dei corpi solidi, le dilatazioni o compressioni, le composizioni o decomposizioni chimiche, sono esempi di trasformazioni (dipendenti da parametri variabili in modo continuo) atte a definire diverse classi continue di enti.

Come avviene nei diversi indirizzi geometrici (che FELICE KLEIN ha caratterizzato al lume della teoria dei gruppi di trasformazioni) gli enti d'una classe appariscono qui come « eguali » rispetto alle trasformazioni indicate: si hanno così le figure eguali della geometria, cui risponde il concetto della « figura astrattamente data nella sua grandezza e forma », e poi i corpi fisici aventi egual « massa » ecc.

Ma, perchè un sistema continuo di trasformazioni valga veramente a definire una classe di enti (eguali, ossia trasformati l'uno dell'altro), bisogna che quel sistema sia un *gruppo*, cioè sussistano le due proprietà fondamentali seguenti:

1) Insieme ad una trasformazione T (conducente da A a B) appartenga al sistema anche l'inversa (che conduce da B ad A);

2) Insieme a due trasformazioni π e T, appartenga al sistema la trasformazione *prodotto*, che si ottiene eseguendo successivamente le due trasformazioni indicate.

Queste condizioni rispondono ai requisiti delle relazioni suscettibili di essere considerate come « eguaglianze », cioè alle proprietà *simmetrica* e *transitiva* delle relazioni egualiformi: se $A = B$ anche $B = A$, se $A = B$ e $B = C$ anche $A = C$; da cui si deduce anche la proprietà *riflessiva* $A = A$.

Ogniqualvolta sia data una classe di enti, suscettibile di venir generata mediante un *gruppo continuo di trasformazioni*, il *concetto* che risponde alla classe può essere *definito mediante le proprietà invarianti*, rispetto alle trasformazioni del gruppo. Bisogna ricercare proprietà invarianti che sieno caratteristiche, cioè che *varierebbero* per altre trasformazioni possibili, o per enti che siano fuori della classe.

Come esempio si consideri la classificazione dei corpi rispetto al gruppo delle trasformazioni fisico-chimiche. La classificazione veramente scientifica comincia colla scoperta

Digitized by Google

di LAVOISIER, che il « peso » costituisce un « invariante additivo » rispetto a siffatte trasformazioni. Poi, in rapporto alle decomposizioni possibili, vengono in luce le qualità invarianti delle sostanze semplici che ne resultano: le quali esprimono caratteri suscettibili di variare soltanto in maniera discontinua. Il concetto di una sostanza chimica semplice è definito dall' insieme di tali qualità, o da un gruppo caratteristico di esse.

V. Definizione per astrazione: misura delle qualità intensive.

Data una classe continua di enti che si assumono come « eguali » (sia che vi si accompagni o meno la considerazione d' un gruppo di trasformazioni per cui riescono trasformabili) il concetto corrispondente si può ritenere definito *per astrazione*. Un esempio semplice è offerto dal concetto della « forma » d' una figura geometrica, per definire la quale basta assumere come « figure d' egual forma » le figure trasformabili per similitudine, che qui appunto si ritengono costituire la classe data.

Se invece si prende come classe data quella delle figure congruenti ad una data, il concetto della « figura astratta » che ne deriva, comprende l' insieme di due *note* o *qualità*: la forma e la grandezza; ognuna delle quali non basta da sola a caratterizzare il nostro concetto. La discriminazione di queste due note non è strettamente necessaria per definire il concetto stesso, ma essa ha tuttavia un significato istruttivo. Significa, infatti, che la classe data è contenuta in due classi continue più ampie: l'una costituita delle figure di equal grandezza (area, volume), l'altra delle figure di egual forma (simili); da cui essa resulta per *interferenza*. Vengono indicati così due modi naturali di generalizzazione del concetto, o d' unificazione concettuale della realtà soggiacente.

Ora, quando un concetto fisico risponde ad una classe continua dipendente da più parametri, sorge la questione se — per una scelta conveniente — ciascuno o qualcuno di questi parametri sia suscettibile di corrispondere ad una *qualità semplice*, per modo che ogni valore del parametro

Digitized by Google

stesso determini una sottoclasse conducente ad un concetto (più ristretto), che abbia del pari un significato fisico. In tal guisa si affaccia la domanda d'una definizione del concetto, che metta possibilmente in luce le sue qualità semplici, dotate ciascuna d'un *grado d'intensità*. Se, o come, tali qualità semplici possano pensarsi quali note separabili del concetto in ordine ad una sua generalizzazione, è cosa che non può essere esaminata prescindendo dalla natura della questione scientifica di cui si tratta.

In ogni caso però la domanda precedente conduce al problema di *misurare una qualità intensiva*. Questo è un nuovo problema definitorio che si risolve d'ordinario col procedimento già spiegato della definizione per astrazione, cioè definendo una relazione d'eguaglianza fra le qualità intensive paragonate. Come sopra abbiamo accennato, siffatta relazione non ha da soddisfare a priori altre condizioni che quelle espresse dalle proprietà formali delle eguaglianze (proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva); vi s'aggiunge tuttavia la condizione che vien porta dal *principio di ragion sufficiente*, il cui valore consiste nell'adeguare la rappresentazione concettuale alle circostanze reali dell'accadere (1). In molti casi ciò basta a determinare il significato dell'eguaglianza. Così per l'eguaglianza di temperatura dei corpi: due corpi, messi a contatto, dan luogo in generale a passaggio di calore dall'uno all'altro; vi è un solo caso in cui il fenomeno non si produce, ed è il caso in cui — le temperature concependosi eguali — manca la ragione d'un cambiamento. Così ancora l'eguaglianza di valore delle merci, in un mercato statico, corrisponde all'unico caso in cui il senso dello scambio è indifferente (all'infuori di motivi personali o singolari).

Colle osservazioni precedenti si mettono in luce i criteri a priori cui la nostra mente tende a soddisfare nel porre le definizioni di eguaglianza. D'altra parte però importa riconoscere che la possibilità delle definizioni medesime esige la sussistenza di fatti, che non costituiscono minimamente ve-

---

(1) Cfr. ENRIQUES, *Il principio di ragion sufficiente nella costruzione scientifica*, nel volume « Scienza e razionalismo », II, 3.

Digitized by Google

rità necessarie, trovando la loro base nell'esperienza. Non vi è a priori alcun motivo perchè veramente la qualità calorifica possegga un grado d'intensità. Così il concetto della temperatura verrebbe meno se accadesse che « due corpi i quali non scambiano calore con un terzo, dessero luogo ad uno scambio fra loro »: c'è, insomma, un fatto sperimentale che si esprime nella proprietà transitiva dell'eguaglianza di temperature, ma che non può ritenersi come una semplice verità logica (MACH).

NOTA. La misura « x », d'una qualità intensiva resta definita per astrazione, quando si è stabilito il significato dell'eguaglianza d'intensità, soltanto a meno d'una funzione arbitraria, $f(x)$, che dipende dall'associare la variazione dell'intensità suddetta a quella d'una quantità qualsiasi (p. es. d'una lunghezza). Questa misura è dunque essenzialmente *relativa*, e può assumere un significato in certo modo *assoluto*, solo quando si riesce a definire in sè « l'eguaglianza degli intervalli » fra coppie di gradi d'intensità; ciò che vale a determinare x a meno d'un fattore di proporzionalità (così nella misura del *tempo* e della cosidetta *temperatura assoluta*: cfr. ENRIQUES *Problemi della scienza*, Cap. V, VI).

VI. Osservazioni conclusive.

Le considerazioni svolte sono ben lungi dall'esaurire il soggetto. È certo anzi che esse dovranno apparire assai misere a chi contempli la varietà di casi e di questioni attinenti all'analisi classificatoria, nelle matematiche, nella fisica, nella sistematica delle scienze naturali, e specialmente nella chimica (quale storia più ricca d'insegnamenti?). Pure io dovrei rallegrarmi e confortarmi, perfino delle mie deficienze, se ciò che qui rimane di manchevole spingesse altri ad approfondire quest'ordine di problemi.

PLATONE e ARISTOTELE, nell'antichità, costruirono la teoria del concetto e della definizione, cercando di unificare le esigenze logiche della classificazione delle forme geometriche e quelle che appariscono nella discriminazione delle specie degli animali. Il problema geometrico ha dato al filosofo ateniese

Digitized by Google

il modello della sua gerarchia delle « idee », le quali dovrebbero dedursi — discendendo dalle più generali alle particolari — col procedimento dialettico deduttivo (distinzione dei casi possibili). E della doppia origine delle sue speculazioni rimane testimonianza anche nella nomenclatura, cioè nell'uso dei sinonimi: idea (ἰδέα = schema o figura) e specie (εἶδος).

Ma i filosofi che sono venuti dopo non hanno seguito l'esempio di quei maestri. Hanno coltivato la teoria del concetto svolgendo e criticando le vedute di PLATONE e di ARISTOTELE, anzichè ritornare ad approfondire, alla luce degli sviluppi più recenti, le analogie e le difficoltà dei processi classificatori che appartengono ai diversi rami della scienza. Qual meraviglia se il loro lavoro ci appare oggi poco fecondo e lontano dalle vere esigenze del nostro sapere?

FEDERIGO ENRIQUES

I triangoli Eroniani dal punto di vista della geometria algebrica

1. Nel numero di gennaio di questo « Periodico » il professore CARLO ROVETTI ha presentato un suo metodo per la determinazione dei triangoli Eroniani (di triangoli, cioè, aventi lati ed area espressi da numeri interi). Ora mi sembra che sia di qualche interesse vedere il problema da un punto di vista superiore, illuminando la facile questione con semplici concetti di geometria algebrica: ed è quanto mi propongo di fare in questo breve articolo.

2. Per maggiore chiarezza è bene ricordare il metodo di KLEIN per la risoluzione, in numeri interi, dell'equazione Pitagorica:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

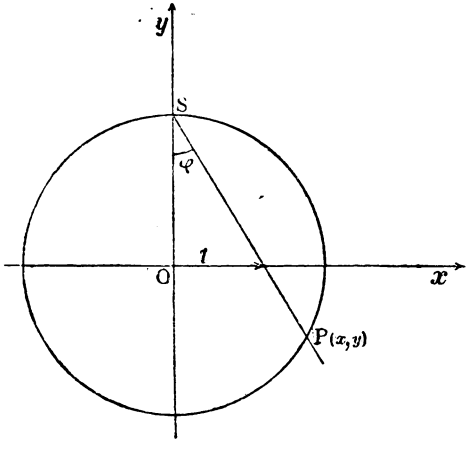
che sorge dalla ricerca di triangoli rettangoli i cui lati siano espressi da numeri interi. Se si pone $z = 1$, cioè si assume

Digitized by Google

l'ipotenusa come unità di misura, gli altri lati appaiono definiti da numeri razionali e il problema si trasforma in quello della ricerca di triangoli rettangoli a cateti razionali; si ha così l'equazione:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

da risolvere in valori razionali. A questa stessa equazione si perviene dividendo ambo i membri della precedente per z^2 e considerando come incognite i rapporti $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{z}$ che, dovendo esser quozienti di numeri interi, risultano razionali. È chiaro che la ricerca delle soluzioni razionali della (1) può geometricamente indicarsi come ricerca dei *punti razionali* del cerchio rappresentato, in coordinate cartesiane ortogonali, dall'equazione (1).



Ora il cerchio è una curva razionale: proiettiamolo da un suo punto S sopra una retta r, sulla quale sia stato prefissato un sistema di ascisse t. A ogni punto della r verrà così a corrispondere algebricamente un *unico* punto del cerchio, le cui coordinate, quindi, si potranno esprimere come funzioni razionali del parametro t. Prendendo come retta r l'asse x e proiettando del punto $S(0, 1)$, t risulta uguale a tang φ e le formule risolutive sono:

$$x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

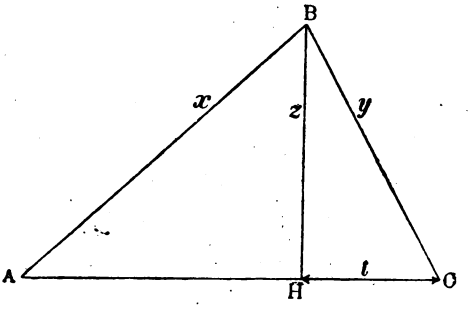
che permettono di ottenere valori razionali di x e y assegnando valori razionali al parametro t.

Si noti come per ottenere che x e y siano effettivamente *numeri* razionali per valori razionali di t, non basta che esse siano *funzioni* razionali di t, ma è necessario che nelle formule risolutive non figurino *irrazionalità aritmetiche*: per

Digitized by Google

ottenere ciò occorre che il punto S, da cui si eseguisce la proiezione, abbia coordinate razionali, il che appunto accade nella risoluzione sopra indicata.

3. Quando si passa dai triangoli Pitagorici ai triangoli Eroniani, la questione si presenta un po' più complicata. Se ABC è un triangolo Eroniano (a lati e area espressi da numeri interi) e si pone uguale a *uno* il lato $\overline{AC}$, assumendolo come



unità di misura, riusciranno razionali i lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e l'altezza $\overline{BH}$ relativa al lato $\overline{AC}$.

Indicando con x e y rispettivamente i lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e con z l'altezza $\overline{BH}$, si hanno le seguenti relazioni (dove $t = \overline{HC}$):

$$(1) \qquad (1-t)^2 = x^2 - z^2 \quad \text{e} \quad t^2 = y^2 - z^2$$

dalle quali, eliminando t, si ottiene l'equazione

$$(2) \qquad (1 + y^2 - x^2)^2 - 4(y^2 - z^2) = 0$$

equazione a cui devono soddisfare tutte le terne (xyz) che competono a triangoli Eroniani.

Consideriamo ora xyz come le coordinate (cartesiane ortogonali) di un punto P dello spazio; le terne xyz soddisfacenti la (2) danno le coordinate dei punti di una superficie del quart'ordine F_4, e le terne di valori razionali i punti razionali di questa. Si conclude, pertanto, che *la ricerca dei triangoli Eroniani coincide con quella dei punti razionali della superficie F_4 di 4° ordine* e *di equazione*:

$$(2) \qquad (1 + y^2 - x^2)^2 - 4(y^2 - z^2) = 0.$$

Digitized by Google

Ora quando, analogamente a ciò che si è visto per i triangoli Pitagorici, si sarà riusciti ad esprimere i lati e l'altezza di un triangolo eroniano in funzione razionale di due parametri u e v (cui si possano dare arbitrariamente valori razionali) mediante formule del tipo

$$(2') \qquad \begin{cases} x = \varphi_1(u\,v) \\ y = \varphi_2(u\,v) \\ z = \varphi_3(u\,v), \end{cases}$$

si sarà costruita una *rappresentazione piana* della superficie F_4. Infatti, ove si considerino u e v come coordinate di un punto P' di un piano, le formule (2') daranno un punto P della F_4, corrispondente di P', e, viceversa, tale punto P si otterrà solo in corrispondenza al nominato P', quando, per coppie di valori u e v diverse, si ottengano triangoli Eroniani diversi. La corrispondenza biunivoca che così sorge fra i punti P della superficie F_4 e quelli P' del piano $(u\,v)$ stabilisce appunto una rappresentazione piana della superficie F_4.

In base a queste considerazioni la ricerca delle formule risolutive per i triangoli Eroniani cessa di dipendere da più o meno eleganti artifici aritmetici; si dovrà invece esaminare le particolarità geometriche della superficie F_4 e riconoscere come queste ne permettano la rappresentazione sul piano; le formule risolutive verranno ora spontanee traducendo analiticamente le costruzioni geometriche.

4. Vediamo anzitutto, discorsivamente, come si ottenga la rappresentazione piana della F_4; nel paragrafo seguente ne daremo la costruzione effettiva, e quindi la effettiva risoluzione del problema dei triangoli Eroniani.

Si riconoscerà facilmente che la F_4 ammette una retta doppia r, ed è noto che ogni superficie del quart' ordine dotata di retta doppia è razionale, cioè rappresentabile biunivocamente sul piano. La razionalità di una tale superficie F_4 si riconosce osservando che i piani passanti per la detta retta doppia formano un fascio, sicchè ciascuno di essi corrisponde biunivocamente a un parametro u. Preso uno di questi piani, diciamolo π_u, esso sega la superficie del quarto ordine secondo una quartica, che si spezza nella retta r con-

Digitized by Google

tata due volte e in una residua conica Γ_u. Ora sulla F_4 si trova una retta a, che risulta unisecante le coniche Γ_u, avendo a comune con una di queste il punto A_u in cui π_u taglia a; e le coordinate di A appaiono funzioni razionali di u.

Entro il piano π_u le rette per A corrispondono biunivocamente a un parametro v e tagliano in un solo punto P la conica Γ_u, quindi le coordinate di un punto P (di Γ_u) sono funzioni razionali di v (e di u). Ora poichè ogni punto P della F_4 appartiene ad un piano π_u e quindi a una conica Γ_u, questo procedimento ci permette di calcolare xyz in funzione razionale di u e v. Aggiungasi che le formule risolutive daranno *valori razionali* per x, y, z, quando u e v siano razionali, se nel procedimento indicato non si saranno introdotte irrazionalità aritmetiche, cioè se la retta doppia r e la retta a unisecante le coniche Γ_u dipenderanno da coefficienti (numeri) razionali. Il che appunto si ottiene nel nostro caso.

5. Osservando l'equazione (2) si riconosce che la superficie F_4 appartiene al fascio

$$(1 + y^2 - x^2)^2 + \lambda(y^2 - z^2) = 0$$

determinato dal cilindro quadrico

$$1 + y^2 - x^2 = 0 \tag{3}$$

contato due volte e dall'insieme dei piani

$$y - z = 0, \qquad y + z = 0$$

e del piano improprio contato due volte. Il cilindro (3) ha due generatrici sul piano improprio: tali rette r e s, essendo doppie per ognuna delle superfici che definiscono il fascio, sono doppie anche per la F_4. Esse sono le rette improprie dei due piani

$$y - x = 0, \qquad y + x = 0.$$

Prendiamo la prima, r, come sostegno del fascio di piani che ci importa considerare: un piano generico del fascio sarà del tipo

$$x - y + u = 0.$$

Digitized by Google

Questo sega ulteriormente la (2) secondo la conica Γ_u di equazione

$$\begin{cases} x - y + u = 0 \\ (1 + y^2 - x^2)^2 - 4(y^2 - z^2) = 0 \end{cases}$$

conica che ha in comune col piano (xy) i punti

$$A \equiv \left(\frac{1-u}{2}, \frac{1+u}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad B \equiv \left(\frac{-1-u}{2}, \frac{u-1}{2}, 0\right).$$

Consideriamone uno, per esempio A. Al variare di u, A varia sul piano (xy) descrivendo il luogo

$$x = \frac{1-u}{2}, \quad y = \frac{1+u}{2}$$

cioè la retta a

$$x + y - 1 = 0.$$

Questa retta è, pertanto, unisecante tutte le coniche del fascio considerato. Proiettiamo dal punto A la conica Γ_u sopra una retta del piano della Γ_u stessa: sulla retta sia stato prefissato un sistema di ascisse v. Può servire come retta delle v la parallela all'asse z passante per il punto

$$K \equiv \left(\frac{3-u}{2}, \frac{3+u}{2}, 0\right)$$

e su di essa si può prendere come parametro v la z stessa; allora ogni retta per A proiettante la Γ_u è del tipo

$$x - \frac{1-u}{2} = y - \frac{1+u}{2} = \frac{z}{v}$$

e la sua ulteriore intersezione con la superficie F_4 è data da:

$$\begin{cases} x = \frac{z}{v} + \frac{1-u}{2} \\ y = \frac{z}{v} + \frac{1+u}{2} \\ (1 + y^2 - x^2)^2 - 4(y^2 - z^2) = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$(4)\qquad x=\frac{1-u^2}{u^2+v^2-1}+\frac{1-u}{2},\quad y=\frac{1-u^2}{u^2+v^2-1}+\frac{1+u}{2},\quad z=\frac{v(1-u^2)}{u^2+v^2-1}.$$

Queste formule, per ogni coppia di valori razionali di u e v, forniscono un triangolo Eroniano.

Osservazione. — Può accadere che alcuni o tutti i valori xyz risultino negativi. Ma osservando che la F_u è simmetrica rispetto a ognuno degli assi e che questa simmetria permette di ricondurci sempre a punti del 1° ottante, si conclude che è lecito prendere senz'altro x, y e z sempre positivi.

Questa osservazione e l'esame dell'equazione (2), la quale è simmetrica rispetto a x e y, mostrano che si avrà sempre

$$(5)\qquad x\geq z,\quad y\geq z$$

per cui le (4), esclusi i casi limiti: $z=0$, $z=\infty$, forniscono sempre triangoli reali. Il segno di uguaglianza in una delle (5) corrisponde al caso di un triangolo Eroniano rettangolo.

Milano, R. Università.

GIUSEPPINA BIGGIOGERO

Il concetto di rapporto nel V libro dell'Euclide [1]

1. Il libro V degli *Elementi* euclidei ha, in confronto ai precedenti, un carattere più generale: non si tratta più esclusivamente di geometria, ma in genere, di grandezze e dei loro rapporti.

Vero è che la teoria riceve più avanti, nel libro VI, una applicazione diretta allo studio della similitudine delle figure,

---

[1] Da *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna* editi da F. ENRIQUES, libri V-IX di prossima pubblicazione presso N. Zanichelli, Bologna. (Libro V, per cura di M. T. ZAPELLONI).

Digitized by Google

ed è anche vero che i *rapporti* non sono considerati dal geometra greco come *numeri*, bensì piuttosto come relazioni fra grandezze, estensive o spaziali; ma, nonostante queste differenze caratteristiche in confronto della concezione moderna, la dottrina astratta che forma il contenuto del libro V assume un significato che oltrepassa quello di una semplice introduzione allo studio geometrico del libro seguente: dico il significato di un organo generale delle scienze matematiche, occupando, rispetto all'insieme di queste, il posto che oggi compete all'analisi.

EUCLIDE non definisce il concetto di « grandezza », che risulta determinato solo implicitamente dall'uso di certe proprietà, quali figurano tra gli assiomi del I libro e le definizioni del libro V (cfr. § 2). Appare quindi che sono da attribuire alla classe delle grandezze non soltanto le lunghezze, gli angoli, le aree, i volumi, offerti dalla geometria, ma anche altre specie di enti, come per esempio i pesi e le forze, di cui più tardi ARCHIMEDE doveva studiare le condizioni di equilibrio. Così appunto si giustifica il significato più generale, che abbiamo ravvisato nel libro V, in confronto alle altre parti più propriamente geometriche degli *Elementi*.

Ora, merita speciale attenzione la circostanza che EUCLIDE ci porga due sviluppi della teoria delle proporzioni, uno dei quali (appartenente a questo libro V) considera i « rapporti di grandezze », mentre l'altro (nel libro VII) si riferisce propriamente ai numeri interi. Nel concetto dell'A. questa teoria ha, in confronto alla prima, un valore più particolare, perchè la ricerca del rapporto di due grandezze non conduce sempre ad un numero (intero o fratto) nel senso greco della parola, dandosi pur luogo al caso incommensurabile.

Per i Pitagorici primitivi, che, a quanto pare, concepivano le linee, le superficie, ecc. come « somme di punti » due grandezze geometriche venivano ad avere naturalmente un rapporto numerico; solo quando nella scuola stessa il teorema di Pitagora condusse alla scoperta degli incommensurabili (1) e suscitò quindi la critica eleatica sui concetti pri-

(1) Cfr. ENRIQUES, *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, Libro I, propr. 48, Stock, Roma.

Digitized by Google

mitivi della geometria, la teoria delle proporzioni e della similitudine, fondata sul semplice confronto di numeri, dovette apparire insufficiente.

Questa insufficienza spingeva da una parte ad elaborare le teorie geometriche, per quanto è possibile, indipendentemente dal concetto della proporzione o della misura, e dall'altra a dare un assetto rigoroso alla teoria dei rapporti, indipendentemente dalla possibilità di pensarli come numeri. Quest'ultimo compito fu assolto da Eudosso da Cnido (prima metà del sec. IV a. C., probabilmente 408-355) a cui appartiene la materia del V libro euclideo. Infatti in due scolii agli *Elementi* (ed. Heiberg, Vol. V, pag. 280 e 282) vien riferita l'opinione che — a prescindere dall'ordinamento — l'*invenzione* della teoria delle proporzioni, così com'è svolta da Euclide, appartenga ad Eudosso: nel senso che a lui spetterebbe il merito di aver stabilito una teoria rigorosamente logica per le grandezze in genere, superando anche lo « scandalo » della incommensurabilità [1].

Del resto, la teoria eudossiana delle proporzioni, nella forma che le ha dato Euclide nel libro V, costituisce una delle parti più belle degli *Elementi,* ed ha sempre suscitato la più grande ammirazione per il suo raffinato rigore logico. Isacco Barrow, maestro di Newton, ne dava questo giudizio: (*Lect. Math.* pag. 136) non vi è nulla, in tutto il corpo degli *Elementi*, di più sottile invenzione, nulla più solidamente stabilito, e più accuratamente trattato, della teoria delle proporzioni.

Diciamo ora che la teoria eudossiana dei rapporti, esposta nel trattato euclideo, differisce assai meno che non sembri dalla teoria moderna dei numeri irrazionali. Per passare da quella a questa, conviene chiamare numero (razionale o irrazionale) il rapporto di due grandezze, indipendentemente dalla loro commensurabilità, e abituarsi a rappresentare tali numeri con simboli letterali, e ad operare su di essi mediante le regole fondamentali del calcolo.

Questo passo si è compiuto attraverso un lento sviluppo di idee, che dalla nomenclatura di *numeri ficti* o *numeri surdi*

---

[1] Intorno al contributo dato alla Geometria da Eudosso, cfr. E. Rufini: *Gli studi geometrici di Eudosso da Cnido.* Archivio di Storia della Scienza, vol. II, n. 2-3.

Digitized by Google

in LEONARDO FIBONACCI (Liber abaci, 1202) e di *numeri irrationales* in GHERARDO DA CREMONA (1114-1187) va fino alla definizione esplicita di NEWTON nella « Arithmetica universalis » (1707): Per numerum non tam multitudinem unitatum, quam abstractam quantitatis cuiusvis ad aliam eiusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus.

Qui importa osservare, con DUHAMEL e STOLZ [1], che, attribuito ai numeri il significato più generale sopra espresso, la giustificazione delle regole fondamentali del calcolo per il caso degli irrazionali si trova già nei teoremi dell'EUCLIDE.

Alla teoria euclidea *dei numeri reali* le matematiche moderne aggiungono tuttavia, con CANTOR e DEDEKIND, un *postulato di continuità* [2], che contiene una supposizione di *esistenza*, capace di sostituire con un principio generale le dimostrazioni che si davano dai Greci, caso per caso, per mezzo di procedimenti costruttivi. All'infuori di questo, la definizione degli irrazionali di DEDEKIND mediante la partizione nel campo dei numeri è direttamente suggerita dalla teoria eudossiana (cfr. §§ 3 e 4). Infatti nel concetto greco l'esistenza di una figura è strettamente legata alla sua costruzione (cfr. ZEUTEN, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge*, pag. 74); questo concetto è seguito con rigore nella trattazione del nostro libro V, dove Euclide evita di ricorrere alla divisione in parti delle grandezze (cfr. § 3), tantochè quelle dimostrazioni in cui si fa ricorso a tale divisibilità, o peggio ancora all'esistenza di una quarta proporzionale, sono da ritenere come guaste o modificate in redazioni successive. Dal punto di vista moderno invece, la nozione della continuità, più o meno esplicitamente introdotta, ci fa accogliere facilmente un postulato di divisibilità delle grandezze, come, per scopo didattico, si fa, per esempio, nell'ENRIQUES-AMALDI.

2. Per esaminare il concetto di rapporto nell'EUCLIDE conviene anzitutto ricordare le prime definizioni del libro V degli *Elementi*.

---

(1) *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, vol. I, 1885.

(2) Cfr. gli articoli di G. VITALI ed F. ENRIQUES nelle *Questioni riguardanti le matematiche elementari*. Ed. III, vol. 1.

Digitized by Google

1. Date due grandezze, la minore si dice *parte* della maggiore, quando la misura (esattamente).

2. La maggiore è multipla della minore, quando è da questa misurata (esattamente).

3. *Ragione* (o *rapporto*) è una relazione scambievole tra due grandezze omogenee, rispetto alla loro quantità.

4. Si dice che due grandezze *hanno ragione tra loro*, quando ciascuna può essere moltiplicata in modo da superare l'altra.

5. Si dice che la ragione di una prima grandezza ad una seconda *è uguale* a quella di una terza ad una quarta quando, presi degli equimultipli qualsiansi della prima e della terza, e degli equimultipli qualsiansi della seconda e della quarta, se il multiplo della prima è maggiore del multiplo della seconda, il multiplo della terza sia maggiore del multiplo della quarta; se uguale, uguale; se minore, minore.

6. Le grandezze che hanno la stessa ragione tra loro si dicono *proporzionali*.

7. Quando, degli equimultipli, il multiplo della prima grandezza è maggiore del multiplo della seconda, ma il multiplo della terza non è maggiore di quello della quarta, si dice che la prima grandezza ha con la seconda *ragione maggiore* di quella che la terza ha con la quarta.

Il termine *grandezza* (o *quantità*, μέγηθος) non è da EUCLIDE esplicitamente definito. Ma, come si è detto sopra nel § 1, si deve intendere che le grandezze soddisfino a quegli assiomi che nel I libro degli *Elementi* sono stati enunciati in generale per gli « enti » o le « cose », uguali o disuguali. (*Assiomi* 1-8). Questa osservazione dispensa dall'aggiungere alle definizioni dell'EUCLIDE dei nuovi assiomi, come quelli che vengono introdotti per esempio, da SIMSON, dove si enuncia che equimultipli di grandezze uguali sono uguali, ecc.

Ora, il vocabolo *grandezza* può assumere il significato ristretto di grandezza geometrica, come sembra, da vari passi (1), che abbia presso ARISTOTELE; sebbene in *Metaph.* (IV, XIII, 1) egli definisca come grandezza ciò che è misurabile, ed in se-

(1) Et. Nic. I, X-XI, 1; An. post. I, V, 4; I, X, 3,

Digitized by Google

guito (id., IX, II, 13), notando la necessità della omogeneità tra la misura e la cosa misurata, comprenda tra le grandezze anche i suoni (voci), i pesi e i numeri, ma solo in quanto si considerino come unità di diverso ordine confrontate all'unità fondamentale (1).

Uno dei passi sopra citati di ARISTOTELE (*An. post.* I, v, 4) è particolarmente notevole perchè reca traccia dell'unificazione concettuale avvenuta probabilmente per opera di EUDOSSO: l'Autore ci fa sapere che un tempo i geometri dimostravano separatamente le proprietà delle proporzioni per le linee, per le aree, per i volumi, per i tempi, ecc., e ciò in mancanza di un nome comune da attribuire a codesti enti.

Ora, l'idea — che abbiam visto già accennata in ARISTOTELE — di caratterizzare il concetto della grandezza mediante la misurabilità, convenientemente analizzata, potrebbe condurre alla definizione implicita che delle grandezze vien data, come diremo, dagli autori moderni, ricorrendo alle nozioni di uguaglianza, di disuguaglianza, e di somma. Tuttavia non appare che questa analisi sia stata messa nei suoi chiari termini dai geometri antichi.

EUCLIDE, nel libro dei *Data*, dice: « I poligoni, i segmenti, gli angoli si dicono dati in grandezza, quando possiamo paragonarli con enti uguali ». Così egli sembra ritenere che il concetto della grandezza venga definito semplicemente dalla relazione di uguaglianza.

CANDALLA, commentando la def. 3, V degli *Elementi* euclidei, dice che, secondo ARISTOTELE, grandezza è ogni cosa, *secundum quam quid aequale, maius vel minor*. Si allude così ad una definizione (che non ci è stato dato di ritrovare) per cui le grandezze verrebbero definite dalle relazioni di uguaglianza e disuguaglianza. Ma questa definizione è insufficiente e darebbe luogo a confondere, per esempio, le grandezze estensive o quantità fisiche (peso, massa, ecc.) con le qualità intensive (come per esempio le temperature, la durezza dei metalli, ecc.), la cui misura dipende da una convenzione arbitraria.

---

(1) Abbiamo cercato così di rendere il senso un po' oscuro del passo aristotelico.

Digitized by Google

La definizione del concetto di grandezza è stata data alla fine del secolo scorso da GRASSMANN e STÖLZ (1), i quali ritengono come classe di grandezze una classe di enti il cui confronto dà origine alle relazioni di uguaglianza, di disuguaglianza e di somma, soddisfacendo ai relativi assiomi o postulati caratteristici. Si tratta dunque di una *definizione implicita* per postulati.

Fra i postulati caratteristici delle grandezze, occorre notare quello che STOLZ chiama postulato di ARCHIMEDE, e che si può ravvisare nascostamente enunciato nella def. 4 del testo euclideo. Questa definizione a molti commentatori (CAMPANO, G. VITALE, CANDALLA, ecc.) parve avere l'ufficio di avvertire la necessità che le grandezze di cui si forma il rapporto siano omogenee; ma il suo significato è di assai maggiore rilievo a cagione del postulato che in essa si racchiude: date due grandezze omogenee, esiste sempre un multiplo dell'una maggiore dell'altra. La quale assunzione, senza dubbio, doveva costituire il fondamento della teoria delle proporzioni di EUDOSSO, autore, come abbiam detto, delle dottrine esposte in questo libro euclideo. Ed è notevole che esprima in forma negativa il principio stesso che si trova negli argomenti paradossali sul moto di ZENONE d'Elea.

Nei suoi argomenti, ZENONE, dava una riduzione all'assurdo dell'ipotesi pitagorica del punto esteso (2); in questa ipotesi la somma di un numero infinito di segmenti supera certamente un multiplo qualsiasi di un segmento dato, e tuttavia ZENONE prova che codesta somma può riuscire inferiore ad una certa lunghezza finita: l'assurdo a cui conduce la teoria pitagorica è dunque, propriamente, la negazione del principio che EUDOSSO più tardi postulerà in maniera esplicita. Così dunque il postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE ha radice nelle prime considerazioni da cui trae origine l'analisi infinitesimale, e, come bene ha avvertito lo ZEUTHEN, costituisce una condizione fondamentale necessaria, tanto per lo sviluppo della teoria delle proporzioni applicata alle grandezze incommensurabili,

(1) Cfr. ENRIQUES, « I numeri reali » nelle *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Ed. 3ª, Vol. I, pag. 327.

(2) Cfr. ENRIQUES. *La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria.* « Per. di Mat. », Marzo 1923, Serie IV, Vol. III, n. 2.

Digitized by Google

quanto, più tardi, per il metodo di esaustione (cfr. ZEUTHEN, l. cit., pag. 115).

Noteremo infine che — per uno scopo didattico — alcuni trattati moderni, limitando la teoria euclidea delle proporzioni al suo ufficio geometrico, introducono il concetto della grandezza geometrica semplicemente col nome comune dato alle grandezze innanzi definite (segmenti, angoli, ecc.). Così il BERTINI (Libro V di Euclide, Roma, 1874). Similmente da queste particolari specie di grandezze prendono le mosse ENRIQUES e AMALDI (*Geometria elementare,* Parte I) per riconoscere la sussistenza di alcune proprietà generali, che assumono come attributi o postulati caratteristici delle grandezze in genere.

In conclusione, crediamo utile riassumere i principi che nel testo euclideo vengono presupposti per lo sviluppo del libro V:

1) Sommabilità ed uguaglianza delle somme o differenze. Cfr. *Assiomi* (libro I).

2) Se due grandezze omogenee (o di una stessa classe) non sono uguali, una di esse è maggiore dell'altra, cioè si può considerare come somma dell'altra e di una terza grandezza (differenza). Questo principio viene postulato implicitamente là dove si ammette che due grandezze debbono essere uguali se l'ipotesi che esista una differenza si riduca all'assurdo (Metodo di esaustione).

3) Postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE, che costituisce un complemento essenziale della assunzione precedente, ai fini del metodo di esaustione.

3. Non si deve credere che la (3) costituisca la vera definizione del *rapporto* (o *ragione*, λόγος). In realtà questo concetto è definito solo più avanti, mediante la def. **5**, che è, come rileveremo, una definizione *per astrazione.*

EUCLIDE, come EUDOSSO, creatore di questa teoria, dovette sentire la difficoltà di definire esplicitamente il rapporto di due grandezze. Per calcolare questo rapporto, almeno nel caso commensurabile, i Greci usarono il procedimento del massimo comun divisore (EUCLIDE, X) che da CATALDI (1597) fu poi trasformato nell'algoritmo della frazione continua. Lo ZEUTHEN stima che, a parte la forma, questo algoritmo appunto fosse già preso dai Greci come definizione del rap-

Digitized by Google

porto nel caso incommensurabile, ravvisando una allusione a ciò in un passo di ARISTOTELE ove si parla della ἀντιναιρέσις. Ma per sfuggire alla infinità del processo che qui si mette in opera, codesta definizione dovette poi essere mutata da EUDOSSO in quella che costituisce la def. 5.

Questa definizione, tradotta in simboli, afferma che

$$A : B = C : D$$

quando, presi ad arbitrio gli interi m ed n, secondochè

$$mA \gtreqless nB$$

anche

$$mC \gtreqless nD.$$

Ora la definizione, che regge tutta la teoria euclidea dei rapporti, dà luogo a diverse osservazioni.

1) Anzitutto, per la forma logica, si ha qui il primo esempio della cosiddetta definizione *per astrazione*, che trova così largo impiego nelle esposizioni critiche della scienza moderna (massa, valore, ecc.... Cfr. ENRIQUES, *Per la Storia della Logica*). Invero, senza che sia detto esplicitamente che cosa significhi ragione o rapporto (poichè, come abbiam detto, la def. 3 non ne porge che una spiegazione illusoria) si definisce l'uguaglianza (e nella def. 7 la disuguaglianza) di due rapporti.

Ma perchè la relazione di proporzionalità fra due coppie possa effettivamente ritenersi come un'« uguaglianza », bisogna che essa soddisfi non soltanto alle evidenti proprietà, *riflessiva*

$$(A : B = A : B)$$

e *simmetrica*

$$(\text{se } A : B = C : D, \text{ anche } C : D = A : B),$$

ma anche alla proprietà *transitiva*

$$(\text{se } A : B = C : D, \text{ e } C : D = E : F, \text{ anche } A : B = E : F);$$

per cui si conclude che due coppie proporzionali ad una terza

Digitized by Google

sono anche proporzionali fra loro: ciò che costituisce l'oggetto della prop. V, 11.

2) Il caso in cui si trovino due interi m ed n per cui

$$mA = nB,$$

e contemporaneamente

$$mC = nD,$$

risponde alla esistenza di un rapporto commensurabile

$$A = \frac{n}{m} B.$$

In questo caso è superfluo considerare i valori di m ed n che dànno luogo alle disuguaglianze

$$mA \gtrless nB$$

contemporaneamente alle

$$mC \gtrless nD.$$

Ma questa considerazione occorre invece per definire il rapporto nel caso incommensurabile.

Essa conduce allora a dividere le frazioni $\frac{n}{m}$ in due classi: quelle per cui

$$A > \frac{n}{m} B$$

cioè

$$mA > nB,$$

e quelle per cui

$$A < \frac{n}{m} B$$

cioè

$$mA < nB;$$

il rapporto $A:B$ che si tratta di definire appare in qualche modo come termine di separazione delle due classi, e così appunto viene modernamente definito da DEDEKIND.

Digitized by Google

3) Lo studioso abituato all'uso moderno della teoria della misura è tratto a chiedersi perchè mai EUCLIDE consideri i multipli delle grandezze fra cui vuole riconoscere la proporzionalità anzichè i sottomultipli. Ma il motivo sta in ciò, che fra le grandezze considerate da EUCLIDE ve ne sono talune per cui egli non sa costruire i sottomultipli, dei quali non vuole perciò affermare l'esistenza. A questa categoria appartengono gli angoli, per i quali è noto che già la trisezione costituisce un problema non risolubile con la riga e il compasso (cfr. l'articolo di A. CONTI nelle « Questioni riguardanti le matematiche elementari »).

4. Lo sviluppo del concetto di rapporto nella critica moderna ha un particolare interesse per intendere la formazione del nostro concetto di numero reale, quale si ritrova in DEDEKIND.

Questa storia comincia con la critica di GALILEO, la quale invero prende motivo da una interpolazione. Alcuni testi, precedenti la edizione critica di HEIBERG, come per esempio quello di CAMPANO, aggiungono alla def. 3 l'altra [4] « Proporzione è uguaglianza di rapporti », che forse è lecito vedere sottintesa nell'uso del termine ἀναλογία. Ora GALILEO, fermandosi sulla def. 3, completata con la [4] tenta di dedurne la prop. 5, da lui concepita non più come definizione, ma come teorema da dimostrarsi. Questo tentativo costituisce l'argomento del « Principio di giornata » aggiunta ai « Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze ». (Giornata V) (1).

Nella trattazione anzidetta si vede GALILEO interpretare la def. 3 di EUCLIDE nel senso dell'ordinario procedimento della misura: date due grandezze, egli cerca una parte aliquota dell'una che sia contenuta nell'altra, e si appoggia sulla considerazione che, se vi è un resto, questo può ridursi,

(1) L'indirizzo indicato da GALILEO fu poi fedelmente seguito dal VIVIANI, che amava chiamarsi ultimo suo discepolo, nel *V Libro degli Elementi di Euclide* (ovvero la Scienza universale delle proporzioni), Firenze, 1734.

Digitized by Google

in ogni caso, piccolo ad arbitrio. Siffatte considerazioni non possono ritenersi estranee al pensiero di EUDOSSO e di EUCLIDE, i quali per certo hanno cominciato col *misurare* le grandezze così come noi lo facciamo; e soltanto per le esigenze della formulazione rigorosa della dottrina furono condotti ad una definizione astratta, che si allontana alquanto dai procedimenti più naturali. GALILEO rappresenta dunque, di fronte ad EUCLIDE, un pensiero meno critico e raffinato; e tuttavia il ricorso storico è interessante, per la comprensione dei progressi dello spirito umano: un'epoca creatrice come quella a cui appartiene GALILEO deve riprendere i concetti risalendo al loro significato originario e risuscitandone la virtù di sviluppo, al di là della forma più perfetta imposta dal rigore logico.

D'altra parte, attraverso la critica di GALILEO, si intravede una nuova maniera di intendere il rapporto di due grandezze, che potrebbe dirsi dinamica, in confronto a quella statica, che figura nell'EUCLIDE. Studiando il moto rettilineo uniforme ed uniformemente accelerato, il sommo fisico pisano è tratto a considerare una grandezza y (spazio o velocità), come *funzione* d'una x variabile (tempo): il caso di dipendenza più semplice è quello della proporzionalità, che si può distinguere in due modi equivalenti:

1) a due valori x_1, x_2 di x corrispondono due valori y_1, y_2 di y tali che

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2,$$

ovvero

(2) $$y = ax.$$

Quest'ultima designazione, che è per noi la più abituale, importa che le grandezze x ed y siano tradotte nelle loro misure numeriche; e, dal punto di vista critico, che non ci si arresti eventualmente di fronte alla considerazione d'un rapporto a, numero irrazionale.

Il commento galileiano alla teoria delle proporzioni appare in questa luce come un chiarimento allo sviluppo stesso del pensiero di GALILEO, che, — attraverso lo studio dei problemi del moto — era venuto a considerare il rapporto

Digitized by Google

come un invariante della coppia di grandezze corrispondenti x, y, al variare di x. Questo pensiero, che ci è oggi tanto familiare, ma che pur si collega ad una nota difficoltà didattica, racchiude invero qualcosa di nuovo rispetto ad ARCHIMEDE, che, considerando il moto uniforme di cui si vale per la generazione della spirale, lo caratterizza semplicemente mediante la proporzione euclidea fra due spazi e i tempi corrispondenti (*Sulle spirali*, prop. 1). Nella considerazione galileiana vi è l'esigenza, se non ancora il riconoscimento, del rapporto come numero, al di là del caso commensurabile: la stessa esigenza che verrà poi affermata da NEWTON nella sua definizione di numero (cfr. § 1).

Ora, l'ordine di idee di GALILEO viene proseguito dal BORELLI, che, nel suo *Euclides restitutus* (1658) offre una teoria delle proporzioni alquanto diversa da quella euclidea e tale da preludere alla introduzione degli irrazionali.

Il BORELLI fonda implicitamente la sua teoria sui due postulati:

1) divisibilità di una grandezza in un numero qualsiasi di parti uguali;

2) postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE;

e sull'enunciato esplicito dell'esistenza della quarta proporzionale.

Un esame dello sviluppo che BORELLI dà alla teoria delle proporzioni, sebbene riveli la mancanza dell'assoluto rigore logico, che caratterizza invece la teoria euclidea, può riuscire suggestivo per l'analogia ch'esso presenta con la teoria di DEDEKIND dei numeri reali.

Distinti infatti i rapporti nel caso della commensurabilità $\left(A = n\,\frac{B}{m}\right)$ e della incommensurabilità (A ha rapporto incommensurabile con B se ogni grandezza che abbia rapporto razionale con B è $\gtrless A$), il BORELLI definisce come uguali i rapporti commensurabili di A con B e C con D se esistono due interi m ed n, per cui

$$A = n\frac{B}{m} \quad \text{e} \quad C = n\frac{D}{m}$$

e passa quindi a definire la disuguianza di un qualsiasi rapporto con un rapporto razionale:

Digitized by Google

« Il rapporto di A con B è maggiore del rapporto razionale di C con D, quando, essendo

$$A' : B = C : D$$

sia $A > A'$.

Sarà invece

$$A : B < C : D$$

se $A < A'$ ».

Così il BORELLI ammette che il rapporto $A : B$ sia maggiore dei rapporti rispetto a B di tutte le grandezze minori di A, e commensurabili con B, e sia minore dei rapporti rispetto a B di tutte le grandezze maggiori di A commensurabili con B. Non vi è da far altro che dare al rapporto il nome di numero, perchè il numero reale venga definito dalla partizione di DEDEKIND, come minore di tutti i numeri della seconda classe, e maggiore di tutti i numeri della prima.

Analogamente, nelle successive definizioni di disuguaglianza di un rapporto qualsiasi con un rapporto irrazionale, e di uguaglianza di due rapporti irrazionali, si ritrova la definizione della disuguaglianza e dell'uguaglianza di due numeri reali (1).

Roma, febbraio 1927.

MARIA TERESA ZAPELLONI

---

(1) Per un più particolare esame della teoria delle proporzioni in BORELLI cfr. F. PODETTI: *La teoria delle proporzioni in un testo del XVII secolo.* Boll. di Bibl. e Storia delle Scienze mat., 1913, fasc. 1°.

Digitized by Google

Alcune considerazioni generali sui calcoli numerici

Nella seconda edizione dei miei *Esercizi di Analisi Matematica* che pubblicherò fra breve, ho incluso un capitolo sui calcoli numerici (uso dei mezzi ausiliari di calcolo, interpolazione, quadrature approssimate, ecc.) cui ho fatto precedere poche considerazioni generali sull'argomento che, se non m'inganno, sono di natura tale da poter interessare anche un pubblico un po' più vasto di quello cui normalmente si rivolge un libro di *Esercizi*. Pertanto, benchè si tratti di cose assai poco peregrine, anzi quasi *lapalissiane*, mi permetto di farle conoscere ai lettori del « Periodico », lusingandomi che qualcuno di essi possa ricavarne qualche giovamento quando gli capiterà di dover fare dei calcoli numerici.

Anzitutto mi sia concesso di spezzare una lancia in favore dell'importanza (anche didattica) dei calcoli numerici, che da parecchi Matematici puri non è, a mio giudizio, adeguatamente valutata. Non bisogna invero dimenticare che lo scopo ultimo delle formule dell'Analisi è quello di permettere il calcolo numerico dei valori di certe variabili dati che siano quelli di certe altre. Conseguentemente, benchè spesse volte al teorico non occorra spingersi fino all'effettivo calcolo numerico delle sue formule, ciò non pertanto egli deve essere sempre pronto a farlo, non appena se ne presenti la necessità. Altrimenti (amo dire ai miei studenti) egli non farebbe miglior figura di un artigliere che non sapesse sparare i suoi cannoni.

E non deve credersi che i calcoli numerici siano cosa facile da potervisi sempre accingere senza alcuna preparazione. Tutt'altro! Tant'è vero che, per poco si esca dai casi più semplici e banali, non molti sanno eseguirli correttamente. Ad esempio, mi ricordo del caso di un noto Matematico, sotto altri rispetti distintissimo, il quale, pregato dal collega

Digitized by Google

di Fisica di calcolargli una certa serie maledettamente poco convergente, adoperava — sudando sette camicie — i logaritmi a 7 decimali, mentre il numero dei termini che aveva presi in considerazione non poteva permettergli di avere, nel risultato, più di 2 o 3 cifre esatte!

Per eseguire correttamente dei calcoli numerici bisogna sovratutto aver riguardo ai tre principî seguenti:

1. *Adeguare i mezzi all'approssimazione da raggiungersi.* Occorre cioè che la potenza dei mezzi di calcolo che si adoperano (numero delle cifre delle tavole logaritmiche, numero dei termini considerati nelle serie, ecc.) sia quella necessaria e sufficiente per raggiungere quel grado di approssimazione che si desidera. Poichè non è sempre facile decidere la cosa *a priori*, nel dubbio, *melius est abundare quam deficere* ma, anche qui, bisogna rifuggire dalle esagerazioni. Invero un calcolatore che, per esempio, eseguisse gli ordinari calcoli della Fisica (in cui si hanno, al più, 3 o 4 cifre significative esatte) coi logaritmi a 7 decimali, farebbe la stessa figura di un alpinista che si armasse di corda e piccozza per salire sul monte dei Cappuccini (1).

2. *Eseguire i calcoli con la maggiore nitidezza e, finchè si possa, in « serie » (nel significato industriale della parola).* Se, per esempio, si devono calcolare i valori (con 4 decimali) della funzione

$$y = \log_e \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{M} \operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

(ch'è l'integrale di $\sec x\, dx$ preso fra 0 e φ) in corrispondenza a valori di φ procedenti, a partire da zero, di 10 in 10 gradi; si comincerà col formarsi, in corrispondenza ai vari valori di φ, i valori di $\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$. Successivamente, mediante le tavole logaritmiche a 5 decimali, si calcoleranno i corrispondenti valori di $\operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, e finalmente si passerà dai logaritmi

(1) Nota per chi non è mai stato a Torino: È un *monte* che domina le acque del Po da ben 75 metri d'altezza!

Digitized by Google

decimali delle tangenti ai loro logaritmi naturali prendendo i logaritmi (decimali) dei logaritmi trovati, aggiungendo a questi il numero costante $\text{Log}\,\frac{1}{M} = 0{,}36222$ e passando quindi ai numeri. Il calcolo verrà all'uopo predisposto nel modo seguente:

φ	$\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}$	$\text{Log tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	$\text{Log Log tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ $\text{Log log}_e \text{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	y
0°	45°	0	.....	0
10	50	0,07619	$\bar{2}$,88190 $\bar{1}$,24412	0,1754
20	55	15477	$\bar{1}$,18969 $\bar{1}$,55191	3564
30	60	23856	$\bar{1}$,37760 $\bar{1}$,73982	5493
40	65	33133	$\bar{1}$,52026 $\bar{1}$,88248	7629
50	70	43893	$\bar{1}$,64240 0,00462	1,0107
60	75	57195	$\bar{1}$,75736 0,11958	3170
...	...	.....	.....	.....

In quest'esempio è capitato di dover aggiungere a tutti i numeri di una colonna uno stesso numero (0,36222). Questa operazione, che è assai frequente, si esegue nel modo più comodo scrivendo il numero costante da aggiungere (o togliere) sull'orlo di una striscetta di carta:

che si sovrappone successivamente ai vari numeri della colonna (cominciando dal basso, per non far macchie d'inchiostro). I risultati delle singole operazioni si scrivono nelle interlinee.

Digitized by Google

Un'altra osservazione da tener presente è che se vi sono delle coppie (o anche terne) di numeri di cui occorra far la somma, converrà predisporre le cose in modo che essi risultino scritti uno sotto l'altro. Bisogna cioè evitare, finchè è possibile, di dover ricopiare dei numeri, perchè ciò fa perdere del tempo ed è frequente causa di errori.

3. *Tutti i calcoli devono essere controllati.*

Anche il calcolatore più esperto, se ha da eseguire dei calcoli un po' lunghi, commette degli errori. Perciò, invece di cercare di conseguire il fine — quasi impossibile a raggiungersi — di *non sbagliare*, bisogna proporsi l'altro di *trovare gli errori e correggerli*. A tale scopo bisogna *sempre* predisporre un acconcio mezzo di controllo dei risultati ottenuti. E il maggior lavoro per ciò necessario sarà anche ampiamente ricompensato dalla minor tensione di spirito che si avrà in tutto il calcolo.

Nel caso frequente che si abbiano da calcolare i valori di una certa funzione *regolare* $f(x)$ (dotata cioè di derivate dei primi ordini continue nell'intervallo che si considera) in corrispondenza a valori di x ugualmente distanziati fra loro, il metodo di controllo più comunemente usato è la formazione del quadro delle differenze della funzione, che (se il numero dei valori calcolati di $f(x)$ lo consente) converrà spingere fino ad ottenere differenze con solo due o tre cifre significative. In tal modo gli eventuali errori commessi nei valori di $f(x)$, che si ripercuotono *ingranditi* nelle successive colonne delle differenze, si renderanno evidenti e potranno venire eliminati ripetendo il calcolo dei valori *sospetti*, cioè di quelli che si trovano nelle orizzontali dove si manifestano le più forti irregolarità nelle differenze.

Giova però avvertire che non sempre è facile discernere sicuramente le irregolarità nelle differenze dovute a piccoli errori nei valori di $f(x)$, da quelle — diciamo così — *fisiologiche*, dovute a fenomeni d'approssimazione, che spesso danno luogo ad inevitabili errori di una o anche due unità dell'ultimo ordine decimale nei valori calcolati. È questione di pratica e anche, un po', d'intuito. Comunque è sempre utile aver presenti i due specchietti seguenti che mostrano schematicamente e a titolo d'esempio, come si propaghino nelle colonne

Digitized by Google

delle differenze dei varî ordini, degli errori di un'unità commessi in uno dei valori di $f(x)$ oppure in due successivi, in sensi diversi:

f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
	—		—	
—		—		+1
	—		+1	
—		+1		−4
	+1		−3	
+1		−2		+6
	−1		+3	
—		+1		−4
	—		−1	
—		—		+1
	—		—	
—		—		—
	—		—	

f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
	—		—	
—		—		+1
	—		+1	
—		+1		−5
	+1		−4	
+1		−3		+10
	−2		+6	
−1		+3		−10
	+1		−4	
—		−1		+5
	—		+1	
—		—		−1
	—		—	

Ad esempio, nel caso della funzione $y(\varphi)$ calcolata dianzi, il quadro delle differenze (sino al terz'ordine) si presenta sotto l'aspetto seguente:

y	y^{I}	y^{II}	y^{III}
0,0000			
	+1754		
0,1754		+56	
	1810		+63
3564		119	
	1929		88
5493		207	
	2136		135
7629		342	
	2478		243
1,0107		585	
	3063		
3170			

Digitized by Google

e presenta una sufficiente regolarità per poterne inferire che i valori calcolati sono giusti. In quest'altro esempio invece (specchietto di sinistra) il 4° valore è errato (di 8 unità della 5ª decimale in più):

	y	y^{I}	y^{II}	y^{III}
	0,93246			
		+ 1539		
	94785		− 9	
		1530		+ 9
	96315		0	
		1530		[− 21]
→	97845		[− 21]	
		1509		[+ 25]
	99354		+ 4	
		1513		− 5
	1,00867		− 1	
		1512		0
	02379		− 1	
		1511		
	03890			

y	y^{I}	y^{II}	y^{III}
0,93246			
	+ 1539		
94785		− 9	
	1530		+ 1
96315		− 8	
	1522		+ 3
97837		− 5	
	1517		+ 1
99354		− 4	
	1513		+ 3
1,00867		− 1	
	1512		0
02379		− 1	
	1511		
03890			

com'è chiaramente indicato dall'andamento delle differenze delle quali, quelle più manifestamente anomale, sono state racchiuse in un rettangolo. Lo specchietto di destra mostra l'andamento delle differenze dopo ch'è stato corretto l'errore.

Riguardo ai *mezzi ausiliari di calcolo* (logaritmi e altre tavole, macchine, regolo calcolatore, strumenti grafici, abachi, ecc.) io penso che sovratutto non bisogna avere esclusivismi ed antipatie ma cercare invece di avvalersi di essi nel miglior modo possibile, adoperando ciascuno nei casi in cui è più appropriato. Per esempio il regolo calcolatore, verso cui molti Matematici puri hanno una ingiustificata antipatia, può rendere dei servigi veramente preziosi. Precisamente esso è indicato in tutti quei casi (e sono moltissimi!) in cui bastano sole 2 o 3 cifre significative. E così pure è utilissimo nell'interpolazione dei logaritmi a 7 decimali, altrimenti così faticosa!

Digitized by Google

Lo stesso si dica per le *macchine calcolatrici*, nei riguardi delle quali è molto difficile dare un giudizio sulla loro effettiva utilità in *tutti* i calcoli che si presentano nelle Matematiche pure ed applicate, in quanto tali macchine sono svariatissime e ricevono — si può dire, ogni giorno — importanti perfezionamenti. Comunque io ritengo che oggi, anche a prescindere dall'alto costo di queste macchine, non si può ancora dire che esse siano atte a sostituire i logaritmi in tutti i casi e, forse, non li sostituiranno mai completamente. È però fuori dubbio che in molti casi (calcolo di serie, integrazioni numeriche, ecc.) le macchine calcolatrici sono preziose, ed è un vero peccato che il loro alto costo ne ostacoli tanto la diffusione fra i Matematici, e perfino nei nostri Istituti universitari. Allo stato attuale della tecnica io credo che il tipo di macchina più conveniente alla comune dei Matematici sia quello conosciuto sotto il nome di « Brunswiga nova ».

Quanto agli strumenti di calcolo grafico, l'unico che mi sembri veramente pratico è il planimetro di Amsler.

Torino, Università.

F. Tricomi

Digitized by Google

Recensioni e Note bibliografiche

Les Maîtres de la pensée scientifique. Collection de Mémoires et oeuvrages publié par les soins de MAURICE SOLOVINE, Paris, Gauthier et Villars.

Vogliamo segnalare ai nostri lettori questa interessante collezione in cui sono già apparsi alcuni capolavori del pensiero fisico e matematico. La collezione è formata di opuscoli che, in generale, superano di poco il centinaio di pagine. Vi hanno già trovato posto: l'*Essai philosophique sur les probabilités* di LAPLACE, i primi capitoli (aventi un interesse generale) del *Traité de Dynamique* di D'ALEMBERT, il primo volumetto delle *Réflexions sur la Métaphisique du Calcul infinitesimal* di CARNOT, la *Géométrie descriptive* di MONGE, il classico *Mémoire sur la chaleur* di LAVOISIER et LAPLACE, *Memorie su l'elettromagnetismo e l'elettrodinamica* di AMPÈRE e poi di EINSTEIN ecc.

La scelta e — dove è il caso — la limitazione delle opere a ciò che ne costituisce l'interesse essenziale, è fatta con giusto criterio, e — in ogni volumetto — vien data una breve notizia biografica sull'autore.

La lettura di questi volumetti, permette così allo studioso delle nostre scienze di mettersi a diretto contatto con i grandi maestri, il cui pensiero è sempre ricco di suggestioni. In pari tempo anche essa lo conduce a rendersi conto dello sviluppo delle dottrine che hanno preceduto e determinato l'attuale stato del sapere: il che significa — come più volte abbiam detto — comprendere la scienza da un punto di vista più elevato.

Science et civilisation. Collection d'exposés synthétique du savoir humain publié sous la direction de MAURICE SOLOVINE, Paris, Gauthier et Villars.

Questa seconda collezione risponde, in un'altra forma, a scopi in qualche modo analoghi a quelli della precedente. Notiamo i due begli opuscoli: H. THIRRING: *L'idée de la theorie de la réla-*

Digitized by Google

tivité, e GEORGES URBAIN: *Les notions fondamentales d'élément chimique et d'atome.*

Il volumetto del THIRRING si raccomanda specialmente per la chiarezza con cui il progresso delle idee einsteniane si fonda sulla comparazione dei fatti fisici e sulle esigenze intrinseche delle dottrine, criticamente valutate, *lasciando da parte ogni apparecchio matematico formale.* Il simbolismo del calcolo offre, è vero, un linguaggio adatto per l'espressione e la precisa determinazione delle teorie fisiche, ma quando i calcoli diventano laboriosi ed esigono una tecnica raffinata (ed è proprio il nostro caso!) allora le difficoltà della sua comprensione sviano lo studioso dall'idea centrale, che risiede non tanto nella trattazione del problema matematico quanto nella traduzione ed impostazione matematica del problema fisico. Il resultato è che, di fronte a tali difficoltà, coloro che non sono matematici di professione abbandonano o rimettono lo studio, provocando una certa soddisfazione dei matematici, i quali vedono così affermata la loro superiorità. Ma, a dire il vero, non so chi si trovi in migliori condizioni! Perchè i puri matematici rischiano sempre di afferrare soltanto la tecnica formale, lasciando sfuggire il senso più profondo delle dottrine.

Per tali motivi il libretto del THIRRING (come quello, sullo stesso argomento, del CASTELNUOVO) è chiamato a rendere un vero servigio allo studioso della teoria della relatività, di cui riesce ad illuminare il senso filosofico.

Il secondo volumetto sopra nominato, quello sulle *Nozioni della Chimica* di URBAIN, offre pure un vivo interesse di divulgazione e di chiarimento. Vi si trova insomma, brevemente ma lucidamente tratteggiato, lo sviluppo del problema della materia, che ha dato luogo, in questi ultimi tempi, a resultati meravigliosi: l'analisi dei costituenti dell'atomo e della sua struttura. Anche il primo capitolo introduttorio del libretto — dedicato alla definizione dell'*Elemento* — attrae simpaticamente l'attenzione del lettore: in poche righe esso mette in luce l'importanza dell'opera di LAVOISIER e di quella di AVOGADRO. Non ci sarebbe dispiaciuto che la considerazione storica fosse stata spinta un po' più innanzi, spiegando in particolare ciò che il concetto della formula chimica deve a CANNIZZARO, e forse anche il significato delle figurazioni molecolari rappresentate dalle formule di struttura.

F. E.

Digitized by Google

Varietà e Questioni proposte

La teoria matematica della lotta per l'esistenza secondo Vito Volterra.

Sono passati ormai 130 anni da quando l'economista inglese MALTHUS enunciava la celebre legge dell'incremento della popolazione: la popolazione, restando invariate le condizioni d'ambiente, cresce in proporzione geometrica, mentre i viveri crescono solo in proporzione aritmetica. Malthus poneva così in evidenza una contraddizione, da cui resulta la necessità di un ostacolo all'incremento normale della popolazione. È chiaro infatti che la sua legge non può essere legge di accrescimento, ma solo legge di tendenza o — come la considera il MESSEDAGLIA — legge differenziale dell'incremento, ove conviene assumere il coefficiente incrementale variabile, appunto in ragione degli alimenti. Del resto, nel concetto popolare, il nome di Malthus è rimasto legato, piuttosto che al ricordo della scoperta scientifica, all'idea della limitazione della prole, pro e contro la quale si sono battuti e si battono ancora sociologhi e moralisti.

Frattanto però la veduta dell'economista inglese, applicata in genere alle specie viventi, ha esercitato un forte influsso su DARWIN. Questi ne ha tratto l'idea della lotta per l'esistenza e quindi della « selezione naturale » che, nella dottrina del grande naturalista, diviene il regolatore dell'evoluzione delle specie organiche.

Darwin non ha svolto una teoria matematica della lotta per l'esistenza, ma — in maniera qualitativa — ha pure intravisto alcune conseguenze notevoli dell'associazione biologica per cui sussistono in un medesimo ambiente specie diverse, che si nutrono dello stesso alimento ovvero vivono l'una a spese dell'altra. Oggi VITO VOLTERRA, richiamato su tale questione dalle osservazioni

Digitized by Google

statistiche del dott. D'ANCONA, traduce in forma matematica alcune semplici ipotesi che derivano dalla legge di Malthus, e inizia così una teoria matematica della lotta per l'esistenza.

Il problema trattato dal Volterra consiste precisamente nello studio delle « Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui di specie animali conviventi » (1), in particolare del caso di un numero qualunque di specie che si cibano l'una dell'altra. Noi ci limiteremo a spiegare come tale problema venga posto in equazione, riferendoci all'ipotesi più semplice di due sole specie.

Anzitutto si dia forma analitica alla legge di Malthus o per meglio dire a quella parte della legge che concerne l'incremento delle specie in ragion geometrica, lasciando cadere l'assunto (già arbitrario per gli alimenti dell'uomo, e che verrà qui opportunamente modificato) riguardante l'accrescimento degli alimenti. Se N è il numero degli individui d'una specie che vivono in un certo ambiente al tempo t, e si dà un coefficiente costante di accrescimento della specie, ε, nell'intervallo di tempo dt l'accrescimento di N sarà

$$dN = \varepsilon N dt;$$

da cui — integrando — resulta la legge esponenziale

$$N = e^{\varepsilon t}.$$

Pongansi ora due specie che convivano nello stesso ambiente, p. es. due specie di pesci, una delle quali si nutra dell'altra. Alla prima specie, contenente N_1 individui, possiamo supporre un coefficiente d'accrescimento positivo ε_1; alla seconda specie — con N_2 individui — che per ipotesi si nutre della prima, si attribuirà un coefficiente d'accrescimento negativo, $-\varepsilon_2$, assumendosi che la specie stessa si esaurirebbe in mancanza del nutrimento offerto dall'altra.

In tali ipotesi, se le due specie fossero isolate, sussisterebbero le equazioni differenziali

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2;$$

ma se le specie convivono, il coefficiente ε_1 diminuisce mentre $-\varepsilon_2$ cresce. Volterra assume che ε_1 diminuisca in proporzione del numero N_2 degli animali mangianti, e invece $-\varepsilon_2$ cresca in ragione del numero degli animali della specie mangiata: così, dopo il

---

(1) *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, serie sesta, II, 3 (1926).

Digitized by Google

tempo dt, ε_1 si cambierà in $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$, e $-\varepsilon_2$ in $-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$, sicchè avremo

$$1) \quad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 \\ \dfrac{dV_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2. \end{cases}$$

Le variazioni di N_1 e N_2 si otterranno dunque integrando il sistema delle equazioni differenziali 1). Fra N_1 e N_2 si trova una relazione in termini finiti che è della forma:

$$\left(\frac{N_1}{e^{N_1}}\right)^{\varepsilon_1} = C\left(\frac{N_2}{e^{N_2}}\right)^{-\varepsilon_2}.$$

Il nostro autore discute direttamente la soluzione del problema e particolarmente questo integrale, col sussidio di diagrammi geometrici. Egli è condotto così a riconoscere che: *Le fluttuazioni delle specie sono periodiche. Le medie dei numeri d'individui delle due specie non dipendono dalle condizioni iniziali finchè si mantengono inalterati i coefficienti d'accrescimento e di voracità.*

Inoltre: *se si cerca di distruggere ambedue le specie, la media del numero d'individui della specie mangiata cresce, e la media del numero d'individui della specie mangiante diminuisce;* almeno finchè non si superi un certo limite, al di là del quale si va all'esaurimento d'ambedue le specie.

Quest'ultima legge si trova verificata dalle osservazioni statistiche del D'Ancona, intorno alla pesca fatta nell'Adriatico durante la guerra e in periodi prebellici o postbellici: poichè la guerra aveva in gran parte interrotto la distruzione sistematica dovuta alla pesca, le specie mangianti si trovavano in quel periodo accresciute, mentre le specie mangiate erano notevolmente diminuite.

Non seguiremo il Volterra nello studio del problema che si riferisce alla convivenza di un numero qualunque di specie che si nutrono le une delle altre, e in particolare dei casi di *associazioni conservative.* Rileveremo soltanto che i procedimenti da lui seguiti — la semplificazione ideale dei fatti, l'assunzione d'una continuità al posto di piccole variazioni discontinue ecc. — sono in tutto conformi ai principii generali dell'applicazione dell'analisi matematica, così come essi sono venuti foggiandosi ed elaborandosi nello studio della fisica. E con questo confronto appunto l'A. li giustifica teoricamente, mentre il riscontro delle previsioni teoriche coll'osservazione statistica, reca alla dottrina il conforto della verifica sperimentale.

F. E.

Digitized by Google

Questioni proposte.

138. I lati di un angolo retto, che ruota intorno al punto (0, 0) della curva $x^3 - ay^2 = 0$, tagliano la curva nei punti P e Q. Determinare l'inviluppo della retta PQ.

G. VIVANTI

139. Fissato un numero naturale α, si consideri l'aggregato degli infiniti punti

$$x = \operatorname{sen} \frac{2\pi n^2}{\alpha n + 1}$$

per n intero e positivo.

Trovare l'aggregato derivato di questo insieme (cioè l'insieme dei punti limiti dell'aggregato precedente).

TR.

140. Sia data una successione qualunque dei segni + e −. Dimostrare che si può determinare, e in modo unico, un numero x (compreso fra 0 e 2π) tale che

$$\operatorname{sen} n^2 x$$

abbia il segno dell'ennesimo termine della successione predetta.

TR.

141. Sia ABC un triangolo, Γ il suo circolo circoscritto. Si lascino fissi A e B e si faccia variare C su Γ. Quale luogo descrive il centro del cerchio inscritto? Quale inviluppo l'asse radicale di Γ e del cerchio inscritto?

G. BIGGIOGERO

142. Per un noto Teorema, dimostrato la prima volta da GALILEO, sappiamo che un grave il quale cada lungo la corda BA di un cerchio verticale, al punto più basso A, impiega il medesimo tempo qualunque sia la corda. Ossia, tutte le corde condotte dal punto inferiore A sono *tautocrone* rispetto alla discesa di un grave, e il tempo di questa discesa è quello stesso della caduta lungo il diametro verticale del cerchio.

Digitized by Google

Abbiamo dunque

$$2r = \frac{1}{2} g t^2$$

da cui

[1] $$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Se invece il grave discende lungo l'arco BA esso si muove come un pendolo semplice di lunghezza eguale al raggio r del cerchio, e il tempo t_1 della discesa, corrispondente a mezza oscillazione semplice, è dato *approssimativamente* da

[2] $$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

L'eguaglianza [2] è tanto più esatta quanto più piccolo è l'arco, e il valore di t_1 dato da essa è il valore vero, al limite, per un arco piccolissimo. Ma se l'arco BA diventa piccolissimo, esso si confonde geometricamente con la sua corda: e quindi *sembra legittimo* ammettere che la caduta lungo un arco piccolissimo o lungo la sua corda, debbano compiersi in tempi eguali. Questa conclusione che sembra così logica, è invece falsa, perchè se facciamo $t = t_1$ troviamo $\pi = 4$. Ossia, il rapporto fra i tempi di caduta per l'arco e per la corda, coll'impiccolire dell'arco tende non ad 1 ma a $\frac{\pi}{4}$.

Dove sta la causa dell'errore?

C. Del Lungo

143. Da un treno che passa davanti a me con la velocità v, un viaggiatore lascia cadere una pietra. Questa ha quindi una velocità v, orizzontale, nella direzione del treno, e l'energia cinetica $E = \frac{mv^2}{2}$; e descrive la sua traiettoria parabolica, come se fosse stata lanciata sulla strada con quella velocità.

Se invece il viaggiatore, dal finestrino, lancia la sua pietra, orizzontalmente, nella direzione del treno, imprimendole rispetto al treno una velocità v, la pietra ha, rispetto a me e alla strada, la velocità $2v$ e quindi l'energia cinetica

$$4\frac{mv^2}{2} = 4E.$$

Digitized by Google

Ma il viaggiatore, lanciando la pietra dal treno in corsa, ha fatto lo stesso lavoro, come se il treno fosse fermo; e l'energia impiegata deve essere la medesima, cioè quella corrispondente all'energia da lui comunicata alla pietra, ossia

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

E la pietra, finchè era nelle sue mani, avendo la velocità v del treno, possedeva soltanto l'energia

$$\frac{mv^2}{2} = E.$$

Sembrerebbe dunque che l'energia cinetica della pietra dovesse essere semplicemente raddoppiata, cioè essere $2E$; e invece è $4E$.

Donde proviene l'eccesso di energia $2E$ che la pietra ha acquistato?

C. Del Lungo

Risposte.

Risposta alla questione n. 132.

Tirata la corda AA' dei punti di contatto e detti L, M i suoi punti di intersezione colle PF, PF', si osservi che queste sono bisettrici rispettivamente degli angoli AFA', $AF'A'$, onde:

$$\frac{FA}{FA'} = \frac{AL}{A'L}$$

$$\frac{F'A}{F'A'} = \frac{AM}{A'M}.$$

Moltiplicando queste due membro a membro, si ha:

$$\text{(I)} \qquad \frac{FA \cdot F'A}{FA' \cdot F'A'} = \frac{AL \cdot AM}{A'L \cdot A'M}.$$

Ora, ricordando che $\widehat{APF} = \widehat{A'PF'}$, si ottiene:

$$\text{(1)} \qquad \frac{AP \cdot PL}{A'P \cdot PM} = \frac{\Delta APL}{\Delta A'PM} = \frac{AL}{A'M}$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{A'P \cdot PL}{AP \cdot PM} = \frac{A'L}{AM}.$$

Digitized by Google

Dividendo membro a membro la (1) per la (2), si ricava:

$$\frac{\overline{AP}^2}{\overline{A'P}^2} = \frac{AL \cdot AM}{A'L \cdot A'M}.$$

Da questa e dalla (I) risulta la relazione da dimostrarsi

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PA'}^2} = \frac{FA \cdot F'A}{FA' \cdot F'A'}.$$

Questa risposta è dovuta al dott. G. AUGUSTO. Altre più o meno analoghe, ci pervennero dai professori A. BARZAGHI, L. CAMPEDELLI, M. MORENO, A. SICILIANO, e da un anonimo, a firma VECCHIO ABBONATO.

Risposte alla questione n. 133.

Il prof. L. DELLACASA ci invia il seguente breve articolo che costituisce sostanzialmente una risposta alla indicata questione 133.

SULLA DIVISIONE APPROSSIMATA DELLA CIRCONFERENZA IN PARTI UGUALI.

Abbiasi un cerchio di raggio 1. Per il centro O faccio passare due assi ortogonali che dirò asse orizzontale e asse verticale.

Sull'asse orizzontale prendo un punto C a distanza c dal centro (ad es. alla sinistra di O). Divido il raggio verticale OA in n parti eguali (il lettore è pregato di fare la figura); sia M l'm^{mo} punto di divisione a partire da O e pongo $\frac{m}{n} = y$, ordinata del punto M. La retta CM incontra il quadrante del cerchio, esternamente al segmento CM nel punto P e sia P_0 la posizione di P per $y = 0$ (cioè l'estremo destro del diametro orizzontale).

Si domanda se l'arco P_0P si possa ritenere per approssimazione eguale a $\frac{m}{n}$ del quadrante (cioè se avendo diviso il raggio in parti eguali, anche il quadrante risulti diviso in parti eguali).

Dalla considerazione dei triangoli simili CMO e CPQ (essendo Q il piede della perpendicolare abbassata da P sul diametro orizzontale), si ha, chiamando α l'angolo POP_0:

$$(1) \qquad \frac{c}{y} = \frac{c + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Digitized by Google

da cui:

$$(2) \qquad c = \frac{y \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha - y}.$$

Se supponiamo $\alpha = \frac{\pi}{2} y$, se cioè immaginiamo diviso anche il quadrante P_0A in n parti eguali e congiungiamo i punti di divisione del quadrante P_0A con i corrispondenti punti di divisione del raggio OA; queste rette determinano sull'asse orizzontale le corrispondenti posizioni del punto C. Vediamo entro quali limiti può variare c.

Per $y = 0$

$$\lim_{y=0} c = \lim_{y=0} \frac{y \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha - y} = \lim_{y=0} \frac{\cos \alpha}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{y} - 1} =$$

$$= \lim_{y=0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} y}{\frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} y}{\frac{\pi}{2} y} - 1} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 1} = 1{,}752.$$

Per $y = 1$

$$\lim_{y=1} c = \lim_{y=1} \frac{\cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{\pi}{2}}{\cos \alpha \cdot \frac{\pi}{2} - 1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-1} = \frac{\pi}{2} = 1{,}570.$$

Le posizioni limiti del punto C sono dunque

$$\frac{2}{\pi - 2} = 1{,}752 \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} = 1{,}57.$$

$$\text{Per } y = \frac{1}{3} \qquad c = \sqrt{3} = 1{,}732$$

$$\text{Per } y = \frac{1}{2} \qquad c = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}707$$

$$\text{Per } y = \frac{2}{3} \qquad c = \frac{6\sqrt{3} + 8}{11} = 1{,}672.$$

Per qualunque valore di c esterno all'intervallo $\frac{\pi}{2} \cdots \frac{2}{\pi - 2}$ non si può mai avere una costruzione esatta. Per ogni valore

Digitized by Google

di y (nell'intervallo $0 \ldots 1$) corrisponde un valore di c per il quale la soluzione è esatta; ma questi valori di c, tranne qualche caso particolare, non sono elementarmente costruibili.

Supponiamo ora dati c e y e calcoliamo il valore di α.

Dalla (1) si ricava:

$$c \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha = cy$$

e ponendo

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{c}$$

dove φ è l'angolo POP_0, si ricava:

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi = c \operatorname{sen} \varphi$$

da cui:

$$\alpha - \varphi = \operatorname{sen}^{-1}(c \operatorname{sen} \varphi)$$

e ponendo:

$$\operatorname{sen}^{-1}(c \operatorname{sen} \varphi) = \psi \qquad (\psi = \widehat{CPO})$$

si ha:

$$\alpha = \varphi + \psi;$$

questo è il valore di α dato dalla costruzione, mentre il valore corrispondente dell'angolo vero è $\frac{\pi}{2} y$: quindi l'errore, cioè la differenza fra il valore vero e il valore approssimato, è:

$$\frac{\pi}{2} y - \alpha = \frac{\pi}{2} y - (\varphi + \psi).$$

Si vede dalla figura che:

per $C > 1{,}752$ sempre valore vero $>$ valore approssimato
» $C < 1{,}57$ » » » $<$ » »

Per $1{,}752 > c > 1{,}57$ l'errore $\frac{\pi}{2} y - \alpha$ parte da zero per $\alpha = 0$, è negativo fino ad un certo valore di α per cui si annulla e poi diventa positivo annullandosi di nuovo per $\alpha = 90^0$.

Quindi per $c = 2$, il valore approssimato α è sempre minore del valore vero; la differenza nulla per $\alpha = 0$ supera i 2^0 per $\alpha = 45^0$, diventa massima $2^0\,23'$ verso i 64^0 e si annulla per $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Ora sic-

Digitized by Google

come sui semicerchi graduati di celluloide del valore di pochi soldi sono segnati in modo ben visibile i gradi, non pare conveniente una costruzione che dà l'errore superiore a 2°; così la costruzione considerata in questo Periodico (n. 5 del 15 novembre 1926: questione proposta: n. 133) non è pratica.

Per $c=\sqrt{3}$ l'errore parte da zero per $\alpha=30°$ in cui si annulla, poi diventa positivo, con un valore massimo verso i 75° di 37′; approssimazione più che sufficiente per le esigenze pratiche del disegno.

Il punto C corrispondente a $c=\sqrt{3}$ si costruisce immediatamente: centro in A con raggio eguale al diametro del cerchio si taglia l'asse orizzontale a sinistra nel punto C; infatti OC è altezza del triangolo equilatero che ha per lato il diametro del cerchio. Questa costruzione trovasi in tutti i trattati di disegno geometrico ed è dovuta al TEMPIER (vedi: JADANZA, *Trattato di Geometria Pratica*, Torino, 1909, pag. 700).

Un'altra soluzione approssimata ci è fornita da $c=1{,}75=1+\frac{3}{4}$, pure facilmente costruibile; essa dà un errore massimo di circa 35′ pure verso i 75°. (Per $c=\sqrt{3}$ e per $c=1{,}75$ l'errore $\frac{\pi}{2}y-\alpha$ fu calcolato di 5 in 5 gradi).

Altre simili considerazioni in proposito ci furono inviate dal prof. A. BARZAGHI.

Risposte alla questione n. 134.

Dato un angolo acuto formato da due raggi a, b si assuma un punto A_0 su a. Da A_0 si abbassi la perpendicolare a b e sia A_1 il piede di questa; da A_1 si abbassi la perpendicolare ad a e sia A_2 il piede di questa; e così di seguito. Indicato con l_i la lunghezza del segmento $A_{i-1}A_i$, si calcoli $\sum_{i=1}^{\infty} l_i$.

Si indichi con O l'origine comune delle semirette a b e con k la lunghezza del segmento arbitrario OA_0 su a, con α l'angolo delle due semirette; si ha

$$l_1 = k \operatorname{sen}\alpha$$
$$l_2 = l_1 \cos\alpha = k \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$
$$l_3 = l_2 \cos\alpha = k \operatorname{sen}\alpha \cos^2\alpha$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_i = l_{i-1} \cos\alpha = k \operatorname{sen}\alpha \cos^{i-1}\alpha$$

Digitized by Google

da cui

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = k \operatorname{sen}\alpha(1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \ldots + \cos^{n-1}\alpha) =$$

$$= k \operatorname{sen}\alpha \frac{1 - \cos^n\alpha}{1 - \cos\alpha},$$

ed essendo

$$0 < \cos\alpha < 1$$

è

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 - \cos^n\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1}{1 - \cos\alpha}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i = k \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 - \cos\alpha} = k \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

La $\sum_{i=1}^{\infty} l_i$ ha un limite anche se α è ottuso; e precisamente in tal caso essendo acuto l'angolo $180° - \alpha$ è

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i = k \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Questa risposta, anche nella sua forma è dovuta a G. GOBESSO. Altre analoghe ci pervennero dai professori L. VINGIONI, A. SICILIANO, L. CAMPEDELLI.

Il prof. A. BARZAGHI osserva che, senza fare ricorso alle serie, si risolve direttamente il problema notando che i lati A_0A_1, A_2A_3, A_4A_5.... proiettati sopra il lato OA_0 danno OA_0, e similmente i lati A_1A_2, A_3A_4.... proiettati su OA_1 danno OA_1.

Sicchè $\Sigma l_i = \dfrac{OA_0 + OA_1}{\operatorname{sen}\alpha}$, dalla qual formula segue poi quella sopra ottenuta.

Il prof. M. CHINI manda la seguente generalizzazione del problema.

Sopra uno dei lati di un dato angolo acuto α si scelga un punto qualsivoglia distante l_0 dal vertice, e da esso si conduca un segmento l_1 inclinato dell'angolo β sul detto lato e terminato al lato rimanente. Condotto poi dall'estremo di l_1 un segmento l_2 inclinato di γ su l_1, interno al triangolo precedentemente ottenuto e compreso nell'angolo α, si conduca dall'estremo di l_2 un segmento l_3 parallelo a l_1, poi dall'estremo di l_3 un segmento l_4 parallelo a l_2, e così di seguito. Si domanda la lunghezza della spezzata di infiniti lati che risulta così iscritta nel dato an-

Digitized by Google

golo α: cioè il limite per $n \to \infty$ della somma dei primi n segmenti considerati.

Mediante il teorema dei seni si ricava subito:

$$l_2 = l_1 \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}, \quad l_4 = l_3 \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}, \ldots.$$

$$l_3 = l_2 \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \quad l_5 = l_4 \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \ldots.$$

con $\alpha+\beta+\gamma < \pi$.

Posto quindi:

$$x = \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}$$

otteniamo:

$$l_{i+2} = l_i x \quad \text{per} \quad i \neq 0.$$

Si noti ora che, potendosi scrivere:

$$x = \frac{\cot(\alpha+\beta)+\cot\gamma}{\cot\beta+\cot\gamma},$$

concludiamo che x è una quantità positiva minore di 1.

Ne segue che, se consideriamo la serie:

$$l_1 + l_2 + l_1 x + l_2 x + l_1 x^2 + l_2 x^2 + \ldots.,$$

possiamo affermare che essa è convergente ed ha per somma:

$$\frac{l_1+l_2}{1-x}.$$

Ma, con l'uso del teorema dei seni, si ha:

$$l_1 = l_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \quad l_2 = l_1 \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}.$$

D'altra parte risulta:

$$1-x = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}.$$

Perciò abbiamo:

$$\frac{l_1+l_2}{1-x} = l_0 \frac{\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}(\beta+\gamma)}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Digitized by Google

Dunque, indicando con s la lunghezza della spezzata, si ha:

$$s = l_0 \operatorname{sen}\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) : \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}.$$

Appare quindi che s, quando restino immutati l_0, β, γ, non varia al variare di α. Cioè:

La lunghezza di una spezzata di infiniti lati, alternativamente paralleli due a due, iscritti in un angolo, dipende soltanto dalla distanza dell'origine di essa dal vertice dell'angolo e dalla direzione dei lati della medesima, ma non dalla grandezza dell'angolo dato.

Si osservi che, quando sia: $\beta = \pi/2$, abbiamo:

$$s = l_0 \cot\frac{\gamma}{2}.$$

Fissato α, se prendiamo:

$$\beta = \pi/2 - \alpha, \quad \gamma = \pi/2 - \beta = \alpha,$$

otteniamo:

$$s = l_0 \cot\frac{\alpha}{2}.$$

E questo è appunto il caso particolare considerato nella primitiva questione n. 134 (1).

Risposte alla questione n. 135.

Sia ABC una sezione retta del prisma dato; un piano passante per C, e godente della proprietà richiesta, dà, come sezione, un triangolo equilatero MNC (A, M stanno su uno stesso spigolo). Posto $AM = x$, $BN = y$; essendo $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; si ha:

$$\overline{MC}^2 = x^2 + b^2, \quad \overline{NC}^2 = y^2 + a^2, \quad \overline{MN}^2 = (y - x)^2 + c^2.$$

Ne segue il sistema (poichè $MC = NC = MN$):

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \\ x^2 - 2xy = a^2 - c^2 \end{cases}$$

(1) Il prof. V. CAVALLARO ci comunica che la questione 134 compare, come cosa secondaria, in alcune sue Note di *Trigonometria*, pubblicate nel « Boll. di Mat. », anno XVI; « Rassegna di Mat. e Fisica », anno V.

Digitized by Google

dal quale si ricava:

$$3x^4 - 2(a^2 - 2b^2 + c^2)x^2 - (a^2 - c^2)^2 = 0 \tag{1}$$

$$y = \frac{x^2 - a^2 + c^2}{2x}.$$

I coefficienti della (1) presentano *sempre* una sola variazione, e quindi essa ci dà, per x^2, due valori reali, distinti (naturalmente escludiamo il caso $a = b = c$) e di segno contrario, e quindi si hanno per x due soli valori reali uguali e di segno contrario. Lo stesso dicasi della y. Ne segue che per ogni punto di uno spigolo del prisma dato passano due piani che lo segano secondo triangoli equilateri (uguali fra loro): e questi piani sono simmetrici rispetto al piano della sezione normale passante per quel punto.

Precisamente si ha:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - 2b^2 + c + \sqrt{\Delta})}$$

$$y = \pm \frac{4c^2 - 2a^2 - 2b^2 + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{3(a^2 - 2b^2 + c^2 + \sqrt{\Delta})}}$$

con $\Delta = (a^2 - 2b^2 + c^2)^2 + 3(a^2 - c^2)^2$.

In particolare per $c = \sqrt{2ab}$, si ha: $x = \pm a$, $y = \pm b$.

La questione precedente viene spesso proposta, come esercizio, in trattati scolastici di geometria elementare, citiamo, ad esempio, l'opera: A. AMIOT, *Geometria elementare*, trad. G. NOVI, a cura di A. SOCCI, Firenze, 1922.

Il caso particolare $c = \sqrt{2ab}$ si trova svolto nelle note raccolte: S. ORTU-CARBONI, *Raccolta di problemi di applicazioni dell'Algebra alla Geometria*, Livorno, 1919; e I. GHERSI, *Metodi per risolvere i problemi di Geometria elementare*, Milano, 1915.

Talora — come in A. ANDRIANI, *Soluzioni e dimostrazioni dei problemi e teoremi proposti come esercizi agli Elementi di* EUCLIDE, Napoli, 1886 — si trova proposta la questione più generale di determinare il piano segante in modo che il triangolo sezione sia simile ad un triangolo dato. Sotto questo nuovo aspetto la trattazione del problema non differisce sostanzialmente dal caso sopra trattato: infatti, essendo assegnati i rapporti dei lati del triangolo CMN, la questione si traduce nel sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + b^2}{y^2 + a^2} = m^2 \\ \dfrac{y^2 + a^2}{(y - x)^2 + c^2} = n^2 \end{cases}$$

Digitized by Google

con m ed n quantità note (per $m = n = 1$, si ha il caso del triangolo equilatero).

Questa soluzione è dovuta a L. CAMPEDELLI. Altre analoghe ci pervennero dai prof. L. VINGIANI, M. MORINI, E. GUERRE, A. BARZAGHI e dalle sig.ne M. MASCALCHI e G. GOBESSO (1).

Risposta alla questione n. 136.

Siano P e Q gli estremi del filo in cui sono applicate le forze $f = -pK$, $f_1 = -qK$ dove p e q sono le intensità dei pesi e K è vettore unitario verticale.

Dal principio dei lavori virtuali si deduce la condizione di equilibrio

$$f\delta P + f_1\delta Q = 0$$

la quale, mediante le

$$\delta y = \delta P \times K, \quad \delta Y = \delta Q \times K$$

dove y e Y sono le ordinate di P e Q rispetto l'asse orizzontale delle ascisse passante per O, luogo della carrucola, si trasforma in

$$\delta(py + qY) = 0$$

da cui

$$py + qY = c. \tag{1}$$

In coordinate polari, con l'origine in O, se $l - \rho = \varphi(\vartheta)$ e $\rho = \varphi_1(\vartheta_1)$ sono le equazioni delle due curve, la (1) si trasforma in

$$\rho \cos\vartheta_1 = c - \frac{p}{q}(l - \rho)\cos\vartheta \tag{2}$$

dove il valore di c può essere determinato dalla condizione che le due curve partano dall'origine O.

Se la curva data è una retta per O, $\vartheta = \Theta$, dalla (2) si ricava

$$\cos\vartheta_1 = \frac{p}{q}\cos\Theta$$

ed anche la seconda curva è una retta per O.

---

(1) Il prof. V. CAVALLARO ci comunica che la questione trovasi risoluta in una Nota di S. AINDI, *Un problema di stereometria* (« Il Pitagora » 1914). Noi, pubblicando la questione proposta dal prof. MACCAFERRI, non pensavamo affatto di indicare un quesito nuovo, ma speravamo che qualche solutore ne richiamasse il legame (assai semplice e noto) con elementari considerazioni di Geometria proiettiva sopra la Omologia. N. d. R.

Digitized by Google

Se la curva data è una lumàca di PASCAL, concoide di un cerchio col centro sulla verticale per O,

$$l - \rho = a \cos \vartheta + b,$$

anche la seconda curva è concoide di un cerchio col centro sulla verticale per O

$$\rho = 2l - b - \frac{a \cdot q}{p} \cos \vartheta_1$$

e si riduce a un cerchio per $b = 2l$.

Questa risposta è dovuta al prof. A. BARZAGHI. Altre, un po' più complesse, ci pervennero dal prof. M. MORINI e dal sig. L. CAMPEDELLI.

Digitized by Google

Atti della Società Italiana di Scienze fisiche e matematiche « Mathesis »

Per la morte di Oliviero Franchi

Il Consiglio Direttivo della Società Italiana di Matematiche « Mathesis », rendendosi interprete dei sentimenti della Società, esprime alla Famiglia le più vive condoglianze per l'immatura perdita del Gr. Uff. OLIVIERO FRANCHI, Consigliere Delegato della Società Editrice Zanichelli e benemerito delle pubblicazioni matematiche.

VERBALI DELLE SEZIONI

SEZIONE MILANESE

Adunanza del 16 dicembre 1926.

La Sezione si è riunita alle ore 17 in un'aula della R. Scuola di Ingegneria. Presiede il prof. Vivanti. Sono presenti i soci: proff. Ambrosoli, Amoroso, Angelini, Baffi, Bianchi, Biggiogero, Cassina, Ceva, Chisini, Cisotti, Finzi, Gabba, Levi, Lorenzola, Maggi, Marcaletti, Masotti, Mayr, Morra, Pastori, Pedote, Poggi, Rossi, Spera, Verga.

Il prof. Vivanti parla su i fondamenti della teoria degli aggregati. Dopo alcune considerazioni sul concetto di infinito, l'oratore si sofferma, in particolare, sul concetto di numero cardinale, su quello di numero ordinale, e sulla definizione dei numeri transfiniti. Accenna, in fine, alle applicazioni della teoria degli aggregati allo studio delle funzioni di variabile reale.

La conferenza è vivamente applaudita.

La seduta ha termine alle ore 18 e 15.

Il Segretario B. FINZI — *Il Presidente* G. VIVANTI

Digitized by Google

Adunanza del 13 gennaio 1927.

La Sezione si è riunita alle ore 17 in un'aula della R. Scuola di Ingegneria. Presiede il prof. Vivanti. Sono presenti i soci proff.: Ambrosoli, Amoroso, Angelini, Baffi, Biggiogero, Ceva, Chisini, Cisotti, Finzi, Gabba, Lauro, Levi, Maggi, Marcaletti, Massarani, Morra, Panello, Pastori, Pedote, Poggi, Praolini, Ressi, Spera, Tratta, Verga, Vivanti.

Il prof. Morra parla dei triangoli Pitagorici. Illustra un procedimento algebrico ed un procedimento geometrico atti a determinare le soluzioni intere dell'equazione Pitagorica. Si occupa poi del problema dei triangoli Eroniani, discutendo una soluzione algebrica ed una soluzione geometrica del problema stesso. L'oratore si sofferma ad esaminare il caso particolare in cui i lati del triangolo sono tre numeri interi consecutivi.

La conferenza è vivamente applaudita, e il prof. Vivanti ringrazia l'oratore.

La seduta ha termine alle ore 18 e 15.

Il Segretario
B. FINZI

Il Presidente
G. VIVANTI

SEZIONE NAPOLETANA

Adunanza del 29 gennaio 1927.

Sono presenti i soci: Colucci, Contarini, D'Escamord, Gallucci, Giordano, Marcolongo, Mercogliano, Nobile, Sannia, Tocchi e molti altri.

Il prof. Sannia intrattiene i convenuti parlando della *Geometria differenziale proiettiva.*

Il Presidente
G. SANNIA

Direttore responsabile: OLIVIERO FRANCHI

Bologna 1927 - Cooperativa Tipografica Azzoguidi

Digitized by Google

L'età della terra

L'età della terra, secondo lord Kelvin.

L'idea che la terra abbia subìto fasi evolutive, non dissimili da quelle che si osservano in atto nei corpi celesti, indusse a speculazioni e a teorie cosmogoniche largamente note. Il problema che le teorie cosmogoniche si propongono di chiarire è il seguente: Ammessa una forma semplice, che si assume come iniziale, in una certa fase di sviluppo del sistema solare, col gioco di fattori universali e semplici si devono dedurre le successive fasi di sviluppo del sole e dei pianeti, sino a raggiungere le condizioni ora esistenti.

Il problema è largamente indeterminato, tanto nelle ipotesi iniziali, quanto in quelle aggiuntive, che via via si devono postulare per adattare ogni teoria alla spiegazione dei fatti positivi.

Da qualunque sistema si parta si giunge ad ammettere, con Leibnitz, che la terra, in una certa fase della evoluzione, è allo stato di globo liquido incandescente; per raffreddamento il globo si consolida, passa cioè a quel « consistentior status » da cui data veramente l'inizio della storia geologica.

Per Lord Kelvin il concetto di « età della terra » rappresentava l'intervallo di tempo decorso dal « first establishment of that *consistentior status* », ossia il tempo impiegato dalla terra nel passaggio da uno stato di globo magmatico, che cominci a consolidarsi, sino al raggiungimento di una distribuzione termica interna pari a quella che ora osserviamo nel suolo.

Per intendere la portata di questa concezione, come pure le distinzioni che le recenti conoscenze impongono ora nei

Digitized by Google

problemi sull'età della terra, occorre siano qui ricordati alcuni fatti essenziali.

Periodi geogenetici.

La terra, prima che iniziasse il proprio consolidamento, si trovava in una fase di vita *astrale,* che non viene considerata nelle questioni sull'età della terra. Raggiunta la solidificazione, il globo si presenta anzitutto, data la temperatura tuttora troppo elevata, privo di acqua; tutta l'acqua è allo stato aeriforme; la terra è ancora nel suo periodo *anidrico.* Quando la temperatura scende sino a rendere possibile la condensazione del vapore, le acque scorrenti sulla crosta solida iniziano quell'azione di disgregazione, di asporto e di sedimentazione, che tuttora è in pieno svolgimento. Ma sulla terra, per lunghissimo tempo, le condizioni termiche e climatiche non sono ancora idonee alla vita; i sedimenti di tale epoca non recano tracce di esseri organici; si è tuttora in periodo *azoico.*

Quando la terra raggiunge la fase in cui è possibile la vita, le condizioni termiche dell'atmosfera, delle acque e del suolo sono analoghe a quelle ora esistenti, pur potendo subire, come la geologia di fatto riconosce, ampie fluttuazioni fra caratteri climatici tropicali e subpolari. I sedimenti terrestri imprigionano fra i loro materiali le spoglie degli esseri organici coevi. Sulla guida di questi fossili la geologia ricostruisce la successione con cui le specie viventi compaiono e si estinguono e gradua le coltri dei sedimenti in ordine cronologico. L'orologio regolatore di tale cronologia, la « successione dei fossili », dà soltanto la posizione relativa, nel tempo, delle singole formazioni geologiche, non la durata assoluta di ognuna di esse.

Gli orologi della geologia.

Quando si tentò di compiere valutazioni assolute, si dovette ricorrere ad altri orologi. Noi assistiamo allo svolgimento di grandiose e lente alterazioni sulla faccia della terra. La vita umana è troppo breve per valutare il tempo occorso in si-

Digitized by Google

mili alterazioni; per taluni fenomeni si hanno però documenti, che si estendono a più generazioni, e si riesce allora a fare qualche stima sul tempo che corrisponde allo sviluppo di essi. Rilevando il tempo occorso in recenti fenomeni di erosione, retrocessione di cascate, sedimentazioni, espansioni deltizie, formazioni torbose, accrescimenti nella salinità marina, ecc, per estrapolazione si può poi risalire al tempo che corrisponde allo sviluppo di analoghi fenomeni dal loro inizio sino all'epoca presente, e stabilire quindi l'età delle corrispondenti formazioni. L'estrapolazione sarebbe lecita se i fenomeni fossero avvenuti sempre collo stesso ritmo che ora si osserva. Ma tale fatto non si avvera. Nessuno dei fenomeni ricordati, nè altri analoghi, costituisce un orologio ad andamento uniforme e di carattere generale. Le cifre, a cui si perviene, hanno semplicemente un carattere presuntivo; fenomeni diversi portano a valori non sempre concordi sull'ordine di grandezza delle età delle formazioni geologiche.

Ricordiamo un esempio.

I fiumi recano, ogni anno, al mare, una quantità d'acqua pari a 1/45.000 dell'acqua esistente negli oceani. La salinità fluviale è circa 1/3565 di quella marina. Ogni anno i fiumi portano quindi al mare una quantità di sale che è circa $1/45.000 \times 1/3565 = 1/160.000.000$ (circa) di quella esistente nel mare stesso. Si può dire che se l'attuale afflusso si fosse mantenuto sempre immutato, in 160 milioni di anni la salinità marina attuale sarebbe stata determinata per accumulo del sale portato dalle acque fluviali. Se il mare inizialmente fosse stato costituito da acque dolci; se gli accumuli successivi di sale non fossero stati mai nè dispersi, nè consumati, nè arricchiti da altri agenti; e se l'apporto salino avesse avuto la supposta regolarità, la cifra trovata rappresenterebbe l'età del mare.

Ma queste ipotesi non si verificarono; la cifra trovata è quindi incerta. Essa contrasta, ad ogni modo, col fatto che già le primissime faune marine avevano carattere di faune di acqua salsa, non di acqua dolce. L'età del mare dovrebbe essere notevolmente maggiore di quella ora valutata. L'orologio « salinità marina », oltre ad essere irregolare, sarebbe in complesso troppo lento.

Digitized by Google

Le fonti dell'energia solare.

La terra raggiunse condizioni idonee alla vita in epoca che i geologi stimano debba essere molto remota. Tali stime devono però essere contenute entro limiti insuperabili. Elemento regolatore del clima terrestre, per tutto il tempo da che la vita si svolge, è il sole. La durata dei tempi geologici è quindi connessa con quella che il Kelvin chiama « possible age of the sun's heat ». Da quanto tempo il sole splende sulla terra e mantiene condizioni non molto diverse da quelle ora esistenti?

Il problema fu investigato da Lord Kelvin nel 1861, e i risultati ottenuti ebbero un peso decisivo nell'orientamento delle idee del sommo Fisico inglese circa il problema dell'età della terra, studiato negli anni successivi.

Per il Kelvin la vera e completa spiegazione dell'energia solare risiedeva nella teoria meteorica, intravista già dal Mayer, e poi svolta, sulla base dei principi termodinamici, da Helmholtz, nel 1854. L'addensamento, verso il centro, della massa solare, trasforma la riserva dell'energia potenziale gravitazionale in energia termica, che viene diffusa per irraggiamento. Con tale processo si giunge alla conclusione che l'irraggiamento solare, nella misura attualmente riconosciuta, non può durare che da 20 milioni di anni; la cifra può essere portata a 100 milioni, accettando le ipotesi estreme più favorevoli; il Kelvin ritiene che quasi certamente non si possa superare tale cifra.

La degradazione dell'energia solare porta a conclusioni fondamentali per la vita della terra.

Se il sole splende da intervalli non superiori a poche decine di milioni di anni, anche la vita sulla terra non può avere età superiore.

E se l'energia termica solare è destinata a una graduale estinzione, a scadenza di pochi milioni di anni, la futura vita degli esseri terrestri è parimente destinata a finire a scadenza ancora minore. A meno che, come osserva il Kelvin, « nuove sorgenti di energia, ora incognite, non siano preparate nella grande riserva della creazione ».

Digitized by Google

Valutazioni di lord Kelvin sull'età della terra.

Le conclusioni inevitabili a cui, all'epoca del Kelvin, si doveva giungere sull'età della vita astrale del sole, appoggiavano in modo singolare le deduzioni della fisica matematica sull'età della terra.

L'orologio, di cui si servì il Kelvin per valutare questa età, fu il fenomeno del raffreddamento terrestre, a partire dal momento in cui il globo iniziò la propria solidificazione, sino al completamento del « consistentior status » di Leibnitz. Le due condizioni iniziali e finali sono rappresentate da distribuzioni termiche: uniformi in tutta la massa, e pari alla temperatura di solidificazione delle rocce, all'inizio; eguali a quelle che ora si constatano in natura, alla fine del processo.

All'età della terra, definita nel senso del Kelvin, si dovrebbe aggiungere, per arrivare all'epoca presente, il tempo di vita del mondo organico; ma questo intervallo, per il Kelvin, era poca cosa rispetto al tempo del raffreddamento, e quindi quantità quasi trascurabile come ordine di grandezza.

La breve vita del calore solare non consentiva si potessero immaginare intervalli più lunghi per la vita del mondo organico.

Ridotto il problema dell'età della terra alla valutazione del tempo in un processo di raffreddamento, non si ha che da adattare le soluzioni semplici delle teorie del Fourier, del « grande poema matematico del Fourier », per usare le stesse parole di ammirazione del Kelvin.

Supposto piano il suolo terrestre; ammesso che la superficie, per contatto coll'ambiente freddo (a temperatura costante) ne assuma la stessa temperatura; ammesso infine che l'arbitraria temperatura iniziale del suolo sia uniforme in tutta la massa interna e pari ai valori sperimentali dei punti di fusione delle rocce, il Kelvin giunge a cifre comprese fra 20 e 400 milioni di anni. Questa sarebbe l'età della terra. I valori limiti corrispondono alle ipotesi estreme possibili; i più attendibili dati sperimentali portano a circa 100 milioni di anni.

Partendo da ipotesi analoghe, ma supponendo la terra sferica, ho potuto valutare per l'età della terra, definita nel

Digitized by Google

senso di Kelvin, poco meno di 200 milioni di anni. L'ordine di grandezza resta quindi fra i limiti estremi valutati dal Kelvin.

Nei classici problemi sul raffreddamento per conduzione si fa astrazione da fattori che possano compensare il calore perduto e quindi alterare l'andamento previsto dall'analisi matematica. Le cifre, a cui si perviene, cessano di avere valore, se interviene l'azione di simili fattori.

Ora nel caso della terra esistono due grandi agenti che rallentano il raffreddamento: la contrazione del volume e la radioattività. Il problema dell'età della terra viene a mutare aspetto quando si tenga conto di tali fattori. Precisamente come muta carattere il problema dell'età del calore solare, quando si tenga conto delle cognizioni attuali sulle sorgenti dell'energia solare, cognizioni che al Kelvin erano ignote.

L'accordo a cui si perveniva, sulla base della scienza del tempo, fra le soluzioni di questi due grandi problemi, giustificava il senso di certezza con cui il Kelvin presentava le proprie deduzioni. Ma ora entrambi i problemi vanno posti su nuove basi e tutte le conclusioni devono essere profondamente mutate.

Sorgenti dell'energia solare.

L'ipotesi kelviniana che nuove fonti di energia potessero venire preparate « nella grande riserva della creazione » è ora un fatto bene accertato. L'Astrofisica riconosce che l'emissione di energia, nelle stelle variabili, non corrisponde affatto alla teoria meteorica di Helmholtz e di Lord Kelvin; la degradazione dell'energia potenziale è molto più lenta di quanto si possa valutare ammettendo che da essa soltanto derivi l'energia irraggiata.

Altre fonti di energia prevalgono su quella gravitazionale almeno nel rapporto di 700 : 1, secondo Eddington, in alcune stelle variabili (δ Cephei). Troppo si dovrebbe qui deviare dal tema di questa breve sintesi, ove si volessero analizzare le recenti ricerche sulla natura delle fonti dell'energia solare. Basti osservare che il fenomeno delle aggregazioni atomiche, nel passaggio da atomi leggeri ad atomi più pesanti (con-

Digitized by Google

cezione del Proust, tornata ora in pieno onore), rappresenterebbe, da sola, una colossale fonte di energia, capace di compensare le due piccole calorie perdute annualmente da ogni grammo della sostanza solare, non solo per pochi milioni, ma per molti miliardi di anni. Nè questa è l'unica sorgente di energia. Il fenomeno dell'assorbimento gravitazionale, messo in vista dal nostro Maiorana, è un'altra riserva disponibile e certamente ingentissima. A differenza di quanto si poteva ammettere anni addietro, la vita del sole, come astro luminoso deve essere valutata in molti miliardi di anni; le energie disponibili ancora sono tali che, per tempi incalcolabili, la vita astrale del sole è assicurata.

Lord Kelvin era costretto a ricorrere ad ipotesi estreme per autorizzare i geologi a prolungare di qualche milione di anni gli intervalli delle formazioni fossilifere, senza dover incorrere in risultati contrastanti colle leggi della termodinamica. Ora invece troviamo che l'età del calore solare sale a cifre fantastiche; i geologi trovano a libera disposizione, e quasi senza limiti, tutti i più vasti intervalli di tempo che essi ritengano di dover ammettere per spiegare il modellamento attuale della faccia della terra.

Il raggiungimento di quel « consistentior status », da cui prende le mosse la geologia, può essere spinto ad epoche assai remote; l'età delle formazioni successive non è più necessariamente quantità trascurabile, di fronte alla durata del periodo del consolidamento e del raffreddamento, ma può essere dello stesso ordine di grandezza e anche di maggiore valore. Così che l'età della terra, definita nel senso di Kelvin, non può essere confusa, quanto a ordine di grandezza, coll'età attuale della terra; occorre distinguere fra la durata della formazione del « consistentior status » e la durata della vita del successivo sviluppo degli organismi.

La terra si raffredda?

La stratificazione termica, nell'interno del suolo, corrisponde a quella di un corpo che siasi raffreddato dall'interno verso l'esterno. Dai valori dei gradienti si deduce che il flusso di calore verso l'esterno corrisponde attualmente a una per-

Digitized by Google

dita di 52 piccole calorie per cm^2 di superficie terrestre e per anno. Ogni cm^3 del globo perde in conseguenza 2×10^{-6} cal. per secondo; globalmente la terra perde circa 10^{13} cal. per secondo.

Noi siamo avvezzi a constatare che un corpo, il quale perda calore, necessariamente si raffredda. Ma tale risultato sperimentale cessa di valere per corpi aventi dimensioni planetarie. La perdita di calore porta ad una contrazione di volume; e questa implica un passaggio da energia gravitazionale a energia termica. In definitiva il calore sviluppato rallenta il raffreddamento; in condizioni opportune può addirittura dare un riscaldamento, così da avere l'apparente contraddizione di un corpo, che perda calore, e nello stesso tempo si riscaldi. Tale appunto è l'origine del calore solare, secondo la teoria meteorica. L'influenza del fattore « contrazione » è meno sentita dopo raggiunta la fase del consolidamento; tuttavia di esso si deve tenere conto nel valutare il tempo impiegato dalla terra nel raffreddarsi.

Ma un altro fattore ha influenza eccezionalmente grande nei fenomeni termici terrestri: la radioattività.

Le rocce contengono sostanze radioattive. Ogni grammo di roccia contiene $N \times 10^{-12}$ *g* di radio, ove N è un numero compreso normalmente fra 1 e 20, prevalendo i valori maggiori nelle rocce acide (ricche in silice) e i minori in quelle basiche.

Nei processi delle disgregazioni radioattive si sviluppa calore, valutato (dal Joly) in $n \times 10^{-13}$ cal. per grammo di roccia e per secondo, ove n è un numero normalmente compreso fra 1 e 4.

Per compensare il calore perduto dalla terra basterebbero 0.06×10^{-12} *g* di radio per *g* di roccia. Sappiamo invece che la concentrazione del radio è molto maggiore. E allora si presenta questo dilemma. O il radio è diffuso uniformemente in tutta la terra, e questa, invece di raffreddarsi, dovrebbe quindi riscaldarsi; ovvero è diffuso solo nelle rocce esterne, e allora il calore di origine radioattiva compensa solo in parte o, come caso limite, in tutto, il calore perduto.

La prima ipotesi non è ammissibile; i gradienti termici nel suolo sono distribuiti come in un corpo che siasi raffreddato; al più si può ammettere che sia subentrata ora una condi-

Digitized by Google

zione di stazionarietà. Il riscaldamento non può avvenire; se l'energia radioattiva superasse quella perduta dalla terra, bisognerebbe immaginare che l'eccesso termico fosse impiegato in fenomeni dinamici nell'interno della terra.

Rimane dunque da accettare l'idea che si abbia una semplice compensazione, parziale o totale, fra calore perduto e energia sviluppata; ciò esige che negli strati profondi le sostanze radioattive vengano a mancare. Conclusione avvalorata dal fatto che le meteoriti metalliche sono quasi del tutto prive di radio.

Non sappiamo se questa compensazione fosse già in atto quando la terra si consolidò. Deve essere in atto però almeno dal tempo in cui le condizioni del suolo furono simili a quelle attuali. La compensazione spiega come possano essere decorsi intervalli enormi di tempo senza che la terra abbia subìto un apprezzabile raffreddamento. Se il fenomeno fu attivo anche nel tempo del consolidamento, bisogna concludere che il raffreddamento fu più lento di quanto si deduca dalle teorie del Fourier.

Le precedenti osservazioni dimostrano che le stime del Kelvin rappresentano solo dei limiti inferiori per l'età della terra; *il raffreddamento deve aver durato non solo decine di milioni di anni, ma miliardi di anni.*

Nello stesso rapporto devono essere amplificati gli intervalli di tempo decorsi dall'epoca, in cui la terra raggiunse condizioni idonee alla vita, sino al presente, come apparirà chiaro dai risultati esposti nel seguito.

L'orologio dei processi radioattivi.

Mentre i ricordati orologi geologici non danno garanzia di uniforme andamento, i processi radioattivi si sviluppano con tale uniformità da costituire, allo stato attuale delle cognizioni, i regolatori più attendibili su cui possiamo fare assegnamento per valutare l'età delle formazioni geologiche.

È ben noto che nei processi radioattivi, per successive disgregazioni molecolari, da corpi instabili (Uranio, Torio) s giunge, come ultimi termini, a corpi stabili: piombo-uranio ed elio. L'elio resta occluso nella roccia, se non intervengono

Digitized by Google

eccessivi riscaldamenti. Il piombo-uranio si distingue poi dal piombo comune, per il fatto di essere costituito da soli isotopi di peso atomico 206.

Si conosce il tempo occorrente perchè da un grammo di uranio (o di torio) si formi una certa quantità di piombo o di elio. Così da un grammo di uranio si ha, in un anno, 1.27×10^{-10} g. di piombo-uranio.

Valutando la quantità di uranio (o di torio) presente in una roccia e la quantità di piombo, o di elio, che ne è derivata, si deduce il tempo decorso da quando la roccia cominciò ad essere sede di processi radioattivi. In tal guisa si riesce a valutare l'età delle formazioni geologiche e fossilifere.

Il calcolo suppone assoluta uniformità nel processo radioattivo; ipotesi che pare corretta, ove si tratti di epoche non molto remote; in talune epoche antiche devono però essere sopravvenute condizioni favorevoli a qualche irregolarità, come fu osservato dal Joly. Tuttavia i risultati, a cui si perviene, sono quanto di meglio forse si possa avere in valutazioni assolute sull'età delle formazioni geologiche; uno stesso metodo porta a risultati concordi, in modo impressionante, quando venga applicato a rocce di varie parti del mondo, geologicamente riconosciute come di una stessa età.

Il metodo del piombo-uranio dà sempre valori superiori a quelli del metodo dell'elio; ciò si accorda col fatto che facilmente una parte dell'elio viene perduta per diffusione nell'ambiente circostante alla roccia analizzata; invece il piombo si conserva. Sono più attendibili quindi i risultati desunti con il metodo del piombo, specie ove si tratti di epoche antiche.

Un terzo metodo, basato ancora sui processi radioattivi, consiste nel raffrontare gli aloni colorati (pleocroici) che si osservano nelle lamine di mica a contatto con granuli radioattivi, con gli aloni che, in dati intervalli di tempo, si riesce a provocare artificialmente cogli stessi materiali. È appunto dall'esame di questi aloni pleocroici che il Joly riuscì a conoscere le irregolarità dei processi radioattivi in epoche antiche.

Digitized by Google

Età di alcune formazioni geologiche.

Col metodo del piombo-uranio, applicato a molte rocce coeve di varie parti del mondo, si potè valutare, con singolare concordanza, che le rocce dell'epoca in cui la vita sulla terra era ai primi albori (periodo algonkiano), hanno l'età di 1300 milioni di anni se sono dell'inizio dell'epoca stessa, e di 1100 milioni se della fase finale.

Anche per le epoche successive, caratterizzate da rocce includenti fossili, si riesce non solo a stabilire l'ordine cronologico, ma anche i valori assoluti delle rispettive età. Così le rocce dell'ultima fase del periodo carbonifero, verso la fine del Paleozoico, risultano avere età di circa 320 milioni di anni.

Il metodo dell'elio fornisce età minori di quelle ora ricordate; ma esse devono essere considerate meno attendibili. Meglio serve tale metodo per le età meno antiche. Con esso si è giunti ad assegnare circa 25 milioni di anni alle rocce del periodo eocenico, periodo che rappresenta, come dice il nome, l'aurora dell'epoca cenozoica, nella quale comparvero i mammiferi sulla terra. E alla prima fase dell'epoca neozoica, cioè a quella della *comparsa dell'uomo*, si viene ad assegnare *circa un milione di anni.*

Estensione e sviluppi del problema.

I rapidi cenni precedenti pongono in rilievo che il problema dell'età della terra investe argomenti proprii di molti campi di scienze. Per tale ragione, nel congresso che la British Association tenne a Edinburgh, nel 1921, tutti gli scienziati furono convocati per una discussione generale sul problema dell'« età della terra » in uno dei massimi teatri della città. Tra gli oratori figurano nomi insigni nella scienza: Lord Reileigh, il geologo Sollas, l'astronomo e matematico Eddington, il geofisico Jeffreys, Sir Oliver Lodge, ecc. La discussione portò a questa conclusione, che pure partendo dai più disparati punti di vista, tutti convennero in un'unica tesi: le antiche valutazioni del Kelvin sono ormai inadeguate; tanto

Digitized by Google

l'età del calore solare, quanto quella del raffreddamento della terra e delle successive evoluzioni di essa, sono certo molto maggiori di quanto si potesse un tempo sospettare.

Ma, come le idee tramandateci da Helmholtz e da Kelvin vennero a subire una profonda rivoluzione colla scoperta di fenomeni ignoti qualche decennio addietro, così non possiamo escludere che altri ritrovati non abbiano da modificare le idee oggi suggerite dallo stato delle attuali cognizioni. Tutte le valutazioni poggiano poi su dati sperimentali assai delicati, suscettibili di più accurate determinazioni. Di questo stato di cose bene si rese interprete il presidente dell'assemblea di Edinburgh, O. W. Richardson, osservando che il problema della età della terra è pur sempre aperto per nuove ricerche e per più precise dilucidazioni.

Trieste, R. Istituto Geofisico

FRANCESCO VERCELLI

Sull'immaginario in geometria

PARTE I - **Problemi elementari.**

1. Introduzione: punti e rette immaginarii. — L'introduzione dei punti immaginarii, qual'è data nel modo più semplice dalla geometria analitica [1] porge una comprensione superiore e talvolta un istrumento d'indagine, anche nello studio di questioni geometriche aventi carattere elementare. Essa offre, in primo luogo, alla geometria una veduta di continuità, riattaccando proprietà apparentemente distinte, come quelle in cui si scambiano somme e differenze di segmenti ecc.: il passaggio continuo dall'una all'altra proprietà

---

[1] Le nozioni elementari, che qui richiameremo, si trovano p. es. in G. CASTELNUOVO, *Lezioni di Geometria analitica*. Una elementare trattazione sintetica degl'immaginarii è data da F. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria proiettiva*, 4ª ed., §§ 38, 65bis.

Digitized by Google

risponde qui al prolungamento analitico di funzioni polidrome (1). In secondo luogo i teoremi generali sulla determinazione delle funzioni razionali per mezzo dei loro zeri e dei loro poli, trovano applicazione nei casi ove certe espressioni (rapporti o prodotti di distanze ecc.) rimangono costanti, al variare di alcuni elementi da cui dipendono: tale costanza riuscendo intimamente spiegata da quei teoremi.

L'interesse di queste considerazioni c'induce a trattarne in una rapida esposizione, recando qualche esempio istruttivo.

Ci limiteremo alla geometria del piano.

Un punto (xy) essendo definito dalle sue coordinate cartesiane ortogonali x e y, si otterranno i punti immaginari (o complessi) dando ad x e y valori comunque complessi:

$$x = x_1 + ix_2$$
$$y = y_1 + iy_2.$$

I punti soddisfacenti ad un'equazione lineare

$$ax + by + c = 0,$$

costituiscono una linea *retta*, che deve in ogni caso pensarsi come costituita da tutti i suoi punti reali e immaginari: del resto questa retta ha infiniti punti reali solo nel caso che l'equazione sia a coefficienti reali (*rette reali*). Se invece a, b, c sono complessi:

$$a = \alpha + i\alpha'$$
$$b = \beta + i\beta'$$
$$c = \gamma + i\gamma',$$

la retta è, essa stessa, *immaginaria* e contiene *un* solo punto reale, cioè l'intersezione colla retta immaginaria *coniugata*:

$$(\alpha - i\alpha')x + (\beta - i\beta')y + (\gamma - i\gamma') = 0.$$

La retta che congiunge due punti immaginarii coniugati è reale; e viceversa una retta reale contiene sempre, insieme ad ogni suo punto immaginario, anche il coniugato.

---

(1) Cfr. E. Bompiani, *Il principio di continuità e l'immaginario in geometria*, art. 10° nel Vol. II delle *Questioni*, raccolte e coordinate da F. Enriques.

Digitized by Google

2. Distanza di due punti: rette isotrope e punti ciclici. — La *distanza* di due punti, (ab) e (cd), resta definita — per estensione — dalla formula

$$r = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2},$$

dove ora a, b, c, d assumono valori comunque complessi. Qui s'incontra subito un resultato paradossale. La condizione perchè la distanza di due punti s'annulli non porta più la coincidenza dei due punti. Dato un punto (ab) *il luogo dei punti aventi distanza nulla da* (ab) *è costituito da due rette immaginarie*, che per (ab) reale sono coniugate:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \{x - a + i(y-b)\}\{(x-a) - i(y-b)\} = 0$$

Queste rette immaginarie, che insieme alle coniugate formano i *cerchi di raggio nullo* con centro reale, si possono definire semplicemente come rette passanti per due punti immaginarii coniugati sopra la retta all'infinito del piano, che diconsi *punti ciclici* del piano. Infatti cerchiamo i punti all'infinito appartenenti alle rette

$$x - a = \pm i(y-b);$$

a tal uopo conviene cambiare x e y nei rapporti x/z e y/z e rendere omogenea l'equazione:

$$x - az = \pm i(y - bz);$$

facendo poi in questa $z = 0$, si ottengono le coordinate dei punti d'intersezione colla retta all'infinito:

$$z = 0, \quad x = \pm iy \quad (\text{o } y = \mp ix).$$

Il nome dei punti ciclici è dovuto alla proprietà che essi sono comuni a tutti i cerchi del piano. Infatti l'equazione d'un cerchio

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

resa omogenea diventa

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2 z^2,$$

e per $z = 0$ dà

$$x = \pm iy.$$

Digitized by Google

Così tutti i cerchi del piano hanno sempre due intersezioni fisse nei detti punti ciclici, M e N. In particolare i cerchi d'ugual centro O, si toccano in M e N, avendo ivi come tangenti le rette OM, ON: come è facile verificare, essendo la retta all'infinito polare del centro O.

Ora il risultato a cui siamo pervenuti innanzi si può anche enunciare come segue: *Vi sono nel piano infinite rette di lunghezza nulla, dette anche rette* isotrope, *che, costituiscono i due fasci di rette parallele coi centri nei due punti ciclici: la condizione di trovarsi sopra una retta isotropa è condizione necessaria e sufficiente perchè la distanza di due punti propri sia nulla.*

Quanto alla distanza di un punto proprio dai due punti ciclici, cioè dai due punti all'infinito che pur si trovano con esso sopra una retta isotropa, si ha un'espressione di forma indeterminata, che vedremo poter assumere qualunque valore, quando si definisca per continuità, calcolando la distanza del punto proprio da un altro che tenda ad andare in un punto ciclico secondo una data linea. Infatti si consideri il punto origine (OO) e il punto (x, ix), che si muove sopra una delle due rette isotrope per esso: la distanza essendo sempre nulla, essa rimane anche nulla al limite, per $x = \infty$. Invece se si paragona coll'origine il punto $\{x, i(x-1)\}$, variabile sopra un altra retta isotropa che non passi per (OO), si trova la distanza

$$x^2 + [i(x-1)]^2 = x^2 - (x-1)^2 = 2x + 1$$

che diventa infinita (del 1° ordine) passando al limite per $x = \infty$. Se, infine, si fa muovere un punto (xy) sul cerchio di raggio r col centro nell'origine,

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

è chiaro che la distanza dall'origine — costantemente eguale ad r — resta sempre r anche al limite per $x = \infty$, cioè quando il punto (xy) venga a cadere in uno dei punti ciclici M o N.

Queste considerazioni si possono estendere al caso in cui un punto $P = (xy)$ vada a cadere sopra la retta all'infinito in uno dei punti ciclici, p. es. in M, movendosi sopra una

Digitized by Google

curva qualunque C (o sopra un ramo di curva) che passi semplicemente per M. Infatti si riconosce facilmente (colle consuete valutazioni degli ordini d'infinito e d'infinitesimo) che se la curva C tocca una qualsiasi retta isotropa diversa da MO (che è la retta isotropa congiungente il punto O) la distanza MO, valutata come limite della distanza d'un punto variabile P di C da O, resulta sempre infinita, come se il punto P si fosse mosso sulla tangente a C. Se invece P si muove sopra una C tangente in M ad MO, il limite della distanza PO dipende dal raggio del cerchio osculatore a C in M, cioè eguaglia il limite che si ottiene facendo tendere P a M sopra questo cerchio: che — per O reale — è un cerchio di centro O (tangente all'infinito alle rette OM, ON). Infine la distanza PO tenderà a 0 — diventando infinitesima d'ordine $r = 1, 2...$ — se P si accosta ad M sopra una C avente con OM in M un contatto d'ordine $r+1$ (ossia $(r+2)$ punto).

3. Angolo di due rette. — L'angolo di due rette,

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c = 0,$$

è dato in generale da

$$\cos\alpha = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{ab' - a'b}{\sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2}},$$

e queste espressioni si assumono a definire l'angolo per rette comunque immaginarie.

Da esse si ricava

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = \frac{aa' + bb' + i(ab' - a'b)}{\sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2}},$$

$$e^{2i\alpha} = \frac{(aa' + bb')^2 - (ab' - a'b)^2 + 2i(aa' + bb')(ab' - a'b)}{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} =$$

$$= \left(1 + \frac{b}{a}\frac{b'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right)^2 + 2i\left(1 + \frac{b}{a}\frac{b'}{a'}\right)\left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right) =$$

$$= \frac{1 + \frac{b}{a}\frac{b'}{a'} + i\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)}{1 + \frac{b}{a}\frac{b'}{a'} - i\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)} = \frac{\frac{b}{a} - i}{\frac{b}{a} + i} : \frac{\frac{b'}{a'} - i}{\frac{b'}{a'} + i}.$$

Digitized by Google

Quindi l'angolo α — a meno del fattore di proporzionalità $2i$ — viene espresso dal logaritmo del birapporto $\left(i, -i, \frac{b}{a}, \frac{b'}{a'}\right)$ che appare nel secondo membro. Questo è il birapporto formato dai punti ciclici M, N coi punti all'infinito delle due rette, A e A':

$$\alpha = \frac{1}{2i} \log (MNAA').$$

In parole: *l'angolo di due rette è misurato dal logaritmo del birapporto che i loro punti all'infinito formano coi punti ciclici* (1).

In particolare segue (2) che: Una retta isotropa forma con un'altra retta qualunque un *angolo infinito.* Due rette parallele — cioè aventi comune il punto all'infinito — formano in generale un *angolo nullo.* Fa eccezione il caso di due rette isotrope a, a' congiungenti il medesimo punto ciclico, per cui il birapporto $(MNAA')$ e quindi l'*angolo*, assume un valore *indeterminato.*

Se si cerca di determinare codesto angolo per continuità, più precisamente, se si cerca un limite dell'angolo secondo cui si vede un dato segmento AB da un punto P che si avvicini al punto ciclico M sopra una curva C (o sopra un ramo di curva che passi semplicemente per M), si riconosce subito che il birapporto da formare è quello delle due rette isotrope MA e MB colla tangente alla curva C e colla retta all'infinito (che va ad N). L'angolo ha dunque un valore finito se la curva su cui P si avvicina ad M non tocca una delle due rette isotrope MA, MH.

---

(1) LAGUERRE, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1853 (pag. 57).

(2) Tengasi presente che il birapporto di quattro punti di una retta

$$(MNAA') = \frac{MA}{NA} : \frac{MA'}{NA'},$$

diventa infinito se uno dei due punti, A o A', viene a coincidere con M o N, ma che esso assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ se ambedue i punti A e A' vengono a coincidere con uno dei due punti M o N.

Digitized by Google

Le considerazioni precedenti tengono a ciò che le rette isotrope hanno rispetto a tutte le altre rette del piano un'orientazione assolutamente privilegiata: di qui anzi viene il nome « isotrope », che significa « egualmente poste ».

Le rette isotrope per un punto restano ferme per qualunque rotazione attorno ad esso. Le rette isotrope si presentano così, nel fascio di centro O, come le rette unite per la congruenza che intercede fra le rette inclinate d'un angolo dato qualsiasi, e in particolare come rette doppie della involuzione formata dalle coppie di rette perpendicolari, cioè come « rette perpendicolari a se stesse »: la relazione di perpendicolarità fra due rette, coi punti all'infinito A e A', si lascia definire come separazione armonica della coppia dei punti ciclici MN, per mezzo di AA'; e però se si cerca la direzione perpendicolare a quella delle rette isotrope per M, si ha da determinare il coniugato armonico di M rispetto ad MN, che è il punto stesso, M.

4. Distanza d'un punto da una retta. — Data, nel piano, una retta (propria)

$$ax + by + c = 0,$$

la distanza da essa d'un punto $P = (xy)$ vale

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

e però questa distanza non si annulla mai per punti P (reali o immaginarii) che sieno fuori della retta. Essa non si annulla neppure quando P va all'infinito, tranne per $ax = -by$; ma questo caso non costituisce affatto un'eccezione, poichè allora P è il punto all'infinito della retta.

La distanza d'un punto da una retta propria è sempre finita, tranne quando il punto stesso cada all'infinito. Soltanto per le *rette isotrope* ($b = \pm ia$), accade che la *distanza* da esse di ogni *punto esterno* riesca sempre *infinita*.

Queste osservazioni portano alcune conseguenze per le aree dei triangoli. L'area d'un triangolo — essendo definita dal prodotto d'un qualunque lato per la corrispondente altezza — non diventa mai infinita per triangoli con lati finiti.

Digitized by Google

Più precisamente assumasi una base $a = BC$, finita e non nulla; sopra di essa si possono sempre costruire due triangoli dando ad arbitrio le lunghezze degli altri due lati, b e c, poichè occorre per ciò intersecare i due cerchi di raggi b e c con centri C e B: orbene questi due cerchi (avendo centro diverso) non si toccano nei punti ciclici, e però si segano in due punti (simmetrici rispetto a BC) a distanza finita, la cui distanza dalla retta BC è dunque finita; pertanto è sempre finita anche l'area del triangolo di lati a, b, c.

5. Area del triangolo. — Vogliamo indicare alcune applicazioni elementari cui dà luogo l'uso dell'immaginario in geometria.

Cominceremo col determinare la formula che ci esprime l'area A del triangolo di lati a, b, c.

Avvertiamo anzitutto che — essendovi due triangoli simmetrici con lati dati, sopra una base data — l'area deve ritenersi definita dai lati a, b, c, a meno del segno; sarà dunque A^2 funzione (algebrica univoca e però) razionale di a, b, c:

$$A^2 = \frac{\varphi(abc)}{\psi(abc)}.$$

Ma poichè, tenendo fermo uno dei tre lati, non è possibile rendere A infinita per valori finiti degli altri due, si deduce che il denominatore ψ è una costante, cioè

$$A^2 = k\,\varphi(abc) = f(abc).$$

Il polimonio f si vede subito essere omogeneo di 4° grado rispetto alle a, b, c, perchè, moltiplicando queste variabili per p, l'area si moltiplica per p^2 e quindi A^2 per p^4. Ciò posto, si osservi che la nostra area s'annulla quando i tre vertici del triangolo vengono in linea retta, cioè per

$$a = b + c,\ a = b - c,\ a = c - b;$$

ne segue che f è divisibile per

$$a + b - c,\ b + c - a,\ a + c - b.$$

Siccome poi i lati a, b, c, sono definiti per le coordinate, come radicali, a meno del segno, la continuità richiede che

Digitized by Google

ciascuno di essi possa mutare di segno (per cammini che girano attorno agli zeri); quindi l'espressione di f non dovrà cambiare cambiando di segno ad una qualunque delle variabili a, b, c: ciò porta che insieme ad $a+b-c$ figuri come fattore in f anche $a+b+c$ (e la stessa conseguenza si ottiene egualmente dalla considerazione degli altri due lati). In conclusione l'area verrà espressa da una formula

$$A^2 = k(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b);$$

ed il fattore numerico k si lascia determinare dal caso del triangolo rettangolo isoscele:

$$a=b=1, \quad c=\sqrt{2}, \quad A^2=\frac{1}{4},$$

$$k=\frac{1}{16},$$

sicchè, ponendo $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, si trova

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

che è la formula consueta d'Erone.

6. Il cerchio come luogo. — Il cerchio si presenta, nel piano, come luogo dei punti che godono di alcune semplici proprietà, cioè: come luogo dei punti la cui distanza dal centro è costante, come luogo dei punti da cui due punti fissi (appartenenti al cerchio stesso) sono veduti sotto un angolo costante (1), e come luogo dei punti le cui distanze da due punti dati sono in rapporto costante. Vediamo di comprendere queste proprietà dal punto di vista della geometria dell'immaginario.

Ciò accade di fare in relazione al teorema fondamentale della teoria delle funzioni, che: *una funzione algebrica, della variabile complessa, z, la quale non diventi mai nulla o infinita (neppure per* $z=\infty$*) si riduce ad una costante.*

---

(1) L'angolo ritenendosi formato dai raggi proiettanti i punti fissi A e B dal punto variabile P, secondo la loro direzione, non vi è differenza nel passare da un arco AB del cerchio al suo complementare.

Digitized by Google

1° La proprietà che la distanza d'un punto dal centro non diventi mai infinita, neppure pei punti in cui la curva sega la retta all'infinito, si traduce nella proprietà del cerchio di passare per i due punti ciclici, che costituiscono appunto le intersezioni predette. E perchè la medesima distanza non si annulli mai, occorre che le rette isotrope uscenti dal centro del cerchio non seghino in punti propri il cerchio stesso, ma lo tocchino negli stessi punti ciclici (all'infinito): tutto ciò ha riscontro nelle proprietà osservate nel § 2.

2° Il luogo C dei punti da cui si vedono due punti fissi generici, A e B, secondo un angolo costante, deve anzitutto soddisfare alla condizione di non segare la retta all'infinito fuori dei punti ciclici M e N, perchè da ogni altro punto all'infinito il segmento AB è veduto secondo un angolo nullo.

Occorre inoltre che nessun ramo della curva C tocchi in uno dei punti ciclici, M o N, la retta all'infinito, altrimenti l'angolo secondo cui si vede AB da un punto P di quel ramo tenderebbe a zero, quando il punto P va in M o N. Perciò l'ordine della curva C sarà un numero pari $2n$ e la C avrà in M e in N la molteplicità n.

Similmente si riconosce che la curva C non può segare la retta AB fuori di A e B, e che ha in essi la molteplicità n, non toccando la AB.

Ora la nostra curva d'ordine $2n$, con 4 punti n-pli si spezza in n coniche passanti pei 4 punti A, B, M, N, e cioè in n cerchi per A e B: vi vede poi subito che i cerchi componenti — di cui è data l'inclinazione sopra la retta AB — sono due, ossia $n = 2$.

Così l'analisi del problema conduce al luogo noto, composto di due cerchi simmetrici per A, B. E si può quindi verificare direttamente che per ogni punto P variabile sopra un cerchio passante per A e B, l'angolo secondo cui AB è veduto da P rimane costante: poichè (cfr. § 3) esso rimane finito e diverso da zero per ogni posizione di P, anche quando P va all'infinito in uno dei punti ciclici M o N, ovvero sulla retta AB in A o B.

3° Passiamo a considerare il cerchio come luogo dei punti le cui distanze da due poli fissi sono in un rapporto costante.

Digitized by Google

Assumansi due poli generici, A e B, e si cerchi il luogo K dei punti P per cui:

$$\frac{PA}{PB} = \text{cost.} \qquad (\text{cost.} \neq 1).$$

Anzitutto dal grado dei polinomi che figurano sotto radicale nelle espressioni di PA e PB, si deduce che la curva K è di 2° grado, cioè una conica. Ora questa conica non può segare la retta all'infinito del piano fuori dei punti ciclici, M e N, perchè le distanze d'un generico punto all'infinito da A e B stanno in un rapporto eguale ad 1 (rapporto determinato, come si comprende, per continuità); dunque la K passerà per M e N, cioè dovrà essere un cerchio.

Questo è il resultato dell'analisi del problema, conforme a quello che si raggiunge, in maniera elementare, col ragionamento di APOLLONIO. Ma si può dare anche la sintesi, mettendo così in luce tutte le coppie di punti, A e B, rispetto a cui i punti P del cerchio hanno distanze formanti un rapporto costante.

Se il rapporto $PA : PB$ deve essere costante, bisogna che esso non diventi mai nullo, nè infinito. Ora esso diventerebbe nullo o infinito se si trovasse un punto P appartenente ad una retta isotropa PM, tale che la PN non fosse isotropa (sicchè $PM = 0$, $PN \neq 0$), ovvero se fosse isotropa la retta PN e non la PM.

Questa osservazione si può esprimere in una maniera per cui giova premettere una semplice definizione. Si congiungano A e B coi punti ciclici M e N, e s'indichino con

$$A' = AM \cdot BN \qquad B' = AN \cdot BM$$

le intersezioni di queste due coppie di rette isotrope: con DARBOUX diremo che i punti A' e B' costituiscono la coppia dei punti *associati* ad A, B [1]. Nell'annessa figura i punti A, B, A', B' M, N, sono rappresentati tutti come reali; sappiamo invece che M e N sono immaginarii coniugati, e per conseguenza se A e B sono reali A' e B' saranno immaginarii coniugati,

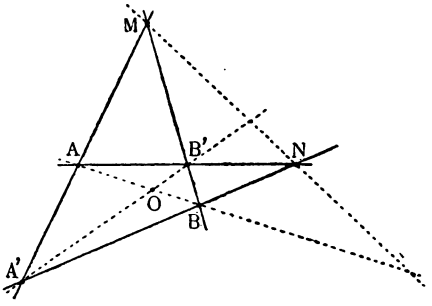
---

[1] Coppie di punti associati sono dunque coppie di vertici opposti d'un quadrilatero completo, che ha due vertici nei punti ciclici.

Digitized by Google

e viceversa, poichè la relazione fra coppie di punti associati è reciproca.

La nozione delle coppie di punti associati permette di esprimere l'osservazione sul cerchio che abbiamo fatta innanzi, come segue: se K è un cerchio luogo di punti, P, per cui le distanze da due poli fissi A e B hanno un rapporto costante, i punti A' e B' associati ad A, B, dovranno stare sopra il cerchio.



Viceversa se i punti A' e B' associati ad A e B stanno sul cerchio K, che cosa si può dire del rapporto $PA : PB$ per un punto P variabile su K?

Questo rapporto non diventa mai nullo, nè infinito perchè quando uno dei suoi termini s'annulla (cadendo P in A' o in B') s'annulla anche l'altro, diventando — come è facile verificare — infinitesimo del medesimo ordine (cioè del 1° ordine rispetto all'ascissa x); e similmente quando uno dei termini diventa ∞ (cadendo P in M o in N) diventa ∞ anche l'altro, e del medesimo ordine. Così si conclude che il detto rapporto riesce costante. Cioè: *il cerchio è luogo dei punti le cui distanze da una coppia di punti fissi han rapporto costante, e ciò rispetto ad infinite coppie di punti, soggette soltanto alla condizione che la coppia dei punti associati appartenga al cerchio.* È poi facile vedere che le coppie di punti possibili sono precisamente quelle che — trovandosi sopra un diametro del cerchio — dividono armonicamente le sue intersezioni colla circonferenza. Questa proprietà, notissima, resulta qui dalle nozioni della polarità relativa ad una conica, mercè un semplice sguardo dato alla figura che precede: se A' e B' sono sulla circonferenza, la retta AB coniugata alla $A'B'$ passerà per il polo O di MN, che è il centro del cerchio ed i punti A' e B' resulteranno coniugati alla conica (cerchio) in cui è iscritto il quadrangolo $MNA'B'$.

In tal guisa la proprietà del cerchio (di Apollonio) di essere luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi hanno un rapporto costante, riesce illuminata secondo il nostro punto di vista: in una maniera superiore che non pretende certo

Digitized by Google

di sostituire la semplicissima maniera elementare, ma che appare soprattutto feconda in ordine a possibili estensioni del problema, come vedremo più avanti.

7. Osservazione sui punti associati. — Si consideri, insieme ad una coppia di punti AB del piano, la coppia associata $A'B'$. Il rapporto delle distanze $PA:PB$, come si è visto, rimane costante quando P varia su un cerchio per $A'B'$, ed allora resta anche costante l'angolo secondo cui il segmento $A'B'$ è veduto da P. Segue da ciò che il detto rapporto $PA:PB$ sarà funzione dell'angolo $\alpha' = \widehat{A'PB'}$.

Si può determinare agevolmente tale funzione. A tal uopo sostituiamo alle coordinate cartesiane a_1a_2, b_1b_2 e xy, di A, B e P, le nuove coordinate *simmetriche*:

$$\alpha_1 = a_1 + ia_2, \quad \alpha_2 = a_1 - ia_2,$$
$$\beta_1 = b_1 + ib_2, \quad \beta_2 = b_1 - ib_2,$$
$$u = x + iy, \qquad v = x - iy,$$

rispetto a cui i due fasci delle rette isotrope vengono rappresentati da $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$; le coordinate simmetriche dei punti associati A' e B' saranno

$$\alpha_1\ \beta_2, \qquad \alpha_2\ \beta_1.$$

Avremo, per le distanze:

$$PA^2 = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 =$$
$$= (x + iy - a_1 - ia_2)(x - iy - a_1 + ia_2) =$$
$$= (u - \alpha_1)(v - \alpha_2),$$
$$PB^2 = (u - \beta_1)(v - \beta_2),$$

quindi

$$\frac{PA^2}{PB^2} = \frac{(u - \alpha_1)(v - \alpha_2)}{(u - \beta_1)(v - \beta_2)};$$

analogamente pei punti associati, essendo p. es.

$$A' = (\alpha_1\beta_2), \quad B' = (\alpha_2\beta_1),$$

Digitized by Google

sarà

$$\frac{PA'^2}{PB'^2} = \frac{(u-\alpha_1)(v-\beta_2)}{(u-\alpha_2)(v-\beta_1)}.$$

D'altra parte ponendo

$$\alpha = \widehat{APB}, \quad \alpha' = \widehat{A'PB'},$$

avremo (§ 3)

$$e^{2i\alpha} = \frac{u-\alpha_1}{v-\beta_1} : \frac{u-\alpha_2}{v-\beta_2} =$$

$$= \frac{(u-\alpha_1)(v-\beta_2)}{(v-\beta_1)(u-\alpha_2)} = \frac{PA'^2}{PB'^2},$$

e però, estraendo la radice,

$$e^{i\alpha} = \frac{PA'}{PB'}.$$

Analogamente

$$e^{i\alpha'} = \frac{PA}{PB}.$$

Cioè: *il prodotto delle distanze d'un punto P da due punti A e B eguaglia* $e^{i\alpha'}$, *designando* α' *l'angolo secondo cui si vede da P il segmento formato dai punti associati A' e B'* (1).

FEDERIGO ENRIQUES

---

(1) Cfr. G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, Parigi, Gauthier et Villars, 1873 (pag. 63).

Digitized by Google

L'opera di Alessandro Volta nell'invenzione e nello studio della pila.

L'opera voltiana.

La pubblicazione di un'edizione nazionale completa delle opere di ALESSANDRO VOLTA, [1] che nel centenario ora ricorrente della sua morte avrà sperabilmente il suo compimento, permette di seguire passo a passo l'opera scientifica del grande Comasco, e i tre volumi finora pubblicati offrono già un quadro ben chiaro di quella che è stata l'opera capitale, sebbene non unica, della sua lunga attività, cioè delle ricerche che lo condussero alla scoperta della corrente elettrica prodotta dal contatto dei conduttori dissimili e, quindi, all'invenzione della pila. La storia di queste ricerche costituisce uno dei capitoli più interessanti e gloriosi della scienza italiana, ove rifulge del più vivo splendore la potenza del metodo sperimentale, che il VOLTA seguì in tutta l'opera sua con la massima coerenza e costanza, riuscendo a procurare al mondo civile una delle sue più superbe conquiste.

Essa dimostra che i risultati da lui raggiunti non sono opera del caso, ma frutto di un lungo, paziente e sapiente lavoro di indagine e di pensiero, nel quale si può ammirare

---

[1] *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, I vol, 1918, II vol. 1923, III vol. 1926, IV vol. 1927. U. Hoepli, Milano. — *La Collezione delle Opere del Cavaliere Conte Alessandro Volta*, Ed. Piatti, Firenze, pubblicata nel 1816 per cura del marchese Antinori, essendo ancora in vita il Volta, non poteva essere, per varie ragioni, veramente completa.

Digitized by Google

in ogni momento il logico progresso delle idee e il successivo cammino nella scoperta dei fatti. La parola *galvanismo* sta ancor oggi a ricordare che il primo impulso a questi studi è venuto da alcune osservazioni fatte per caso e segnalate agli scienziati da LUIGI GALVANI; ma il VOLTA condusse le sue ricerche per una via del tutto sua partendo da un'interpretazione dei fenomeni ben diversa da quella dei galvanisti.

L'opera voltiana ci apparisce tuttavia nel suo pieno valore solo quando si consideri, oltre a ciò, quali erano le tendenze che ancora dominavano al suo tempo, quando si accoglievano spesso teorie prive di ogni fondamento sperimentale o dettate da preconcetti metafisici, le quali nonchè contribuire ad un progresso della scienza, ne ostacolavano lo sviluppo. Le teorie del VOLTA, anche al lume delle conoscenze odierne, rivelano una profonda penetrazione dei fenomeni, alla quale egli seppe giungere sia con l'acume della sua mente sia con la bontà del metodo seguito nel rendersi fedele interprete dei fatti osservati.

Osservazioni e teorie del Galvani.

Verso la metà del secolo XVIII era sorta fra i fisiologi una viva discussione sul modo di agire dei nervi nei fenomeni del moto e delle sensazioni. Si pensava che dovesse esistere un fluido molto sottile e mobilissimo, analogo a quello che allora si credeva fosse la luce, il calore, l'etere e l'elettricità, e che questo, scorrendo lungo i nervi, eccitasse le contrazioni nei muscoli e trasportasse le sensazioni al cervello. Su simili principi aveva fondata una teoria il fisiologo svizzero ALBERTO HALLER, secondo il quale un fluido animale o *spirito vitale* era diffuso in tutto il sistema nervoso e si squilibrava quando agiva su quello uno stimolo, sia interno che esterno; affluendo verso i muscoli, vi produceva un'irritazione, un gonfiore e quindi la contrazione della parte.

Questo agente nervoso, questa *vis vitae* era concepita dai più in forma vaga e indeterminata, ma già prima della scoperta del GALVANI, parecchi propendevano a crederlo identico al fluido elettrico. Si era osservata la grande sensibilità

Digitized by Google

dei nervi alla scarica di una bottiglia di Leida. Si conosceva la capacità dei ginnoti e delle torpedini di produrre delle scosse identiche a quelle delle scariche elettriche; il WALS era riuscito addirittura a caricare per mezzo di questi animali una bottiglia di Leida e a dimostrare così in essi la presenza del fluido elettrico. Generalizzando il fenomeno, si ammetteva che in ogni organismo animale si producesse, in minor grado, il medesimo fluido. Fu uno dei primi ad ammetterlo il SAUVAGES, e lo seguirono in Italia il GARDINI e il LAGHI e altrove il DU FAY, l'HUBER, il DES HAIS ed altri.

In quel tempo si occupava della *irritabilità halleriana* anche LUIGI GALVANI, ch'era professore di anatomia all'Università di Bologna e già celebre per parecchi pregevoli lavori di anatomia e di fisiologia; su questo argomento presentava nel 1772 all'Accademia bolognese una memoria, che poi andò disgraziatamente perduta.

Mentre egli stava appunto occupandosi di queste ricerche sulla eccitabilità animale, fu condotto a fare quelle osservazioni, che diedero poi l'impulso alla scoperta della corrente elettrica. Nelle sue esperienze si serviva delle rane, opportunamente preparate e liberate dagli integumenti, perchè queste, come animali a sangue freddo, conservano più a lungo dopo la morte dei residui di vitalità.

Un giorno del 1780, mentre attendeva insieme con alcuni amici e famigliari a queste esperienze, fu reso attento dalla moglie del fatto che le rane si contraevano vivacemente ogni qualvolta venivano toccate con uno scalpello, mentre da una macchina elettrica, che si trovava in qualche vicinanza, scoccava una scintilla.

Il VOLTA in una delle sue prime memorie sull'elettricità animale, trattando di questa prima osservazione del GALVANI, rileva che il fenomeno era facilmente spiegabile con la teoria delle *atmosfere elettriche.* Non era che il fenomeno del *contraccolpo elettrico,* che il MAHON aveva spiegato già un anno prima come un effetto dell'induzione. Fu una fortuna che il GALVANI non avesse saputo rendersene conto, per cui, ritenendo di trovarsi dinanzi a fenomeni non ancora studiati, li fece oggetto di ulteriori indagini.

Digitized by Google

Sei anni più tardi, il caso lo condusse a scoprire un fatto veramente nuovo e interessante. Voleva osservare sopra le rane gli effetti dell'elettricità atmosferica. Perciò esponeva i loro corpi all'aperto appendendoli mediante uncini metallici alla balaustra di ferro del suo terrazzino. Notò che, quando appoggiava l'uncino sulla inferriata, la rana si contraeva. Il fenomeno non poteva stare in alcuna relazione coll'elettricità atmosferica. Perciò si mise a studiarlo ripetendo e variando in più modi l'esperienza. Così giunse alla conclusione che « le contrazioni si eccitano negli animali vivi o morti di « fresco, allorchè i muscoli e i nervi formano parte di un « circuito chiuso costituito tutto di corpi conduttori dell'elet- « tricità e in parte di sostanze metalliche ».

Il GALVANI escluse che la causa delle contrazioni potesse risiedere nell'arco metallico; l'attribuì quindi ad un'elettricità prodotta nelle membra della rana stessa e fu tosto convinto d'aver trovato quel fluido animale che i suoi contemporanei andavano cercando, e che questo non fosse altro che il fluido elettrico. Tuttavia moltiplicò le esperienze e gli studi e non ne pubblicò i risultati che nel 1791, con la sua celebre opera: « De viribus electricitatis in motu musculari commentarius », che però fu nota appena l'anno seguente. In questo riassume la sua teoria sull'*elettricità animale* nel seguente modo:

« Tutti gli animali posseggono un'elettricità loro propria « (*elettricità animale*), la quale si raccoglie nel cervello secer- « nendosi dal sangue che affluisce a questo viscere; l'elettricità « viene condotta per mezzo dei nervi ai muscoli, che riescono « così caricati, come altrettante batterie di Leida, di elettricità « positiva nella parte interna delle fibre, di elettricità nega- « tiva nella parte esterna ».

Quale fosse l'impressione suscitata da questa scoperta nel mondo scientifico di allora, si può comprendere dalle seguenti parole del DU BOIS REYMOND: « L'agitazione sollevata dalla « comparsa del Commentario fra i fisici, i fisiologhi e i me- « dici può paragonarsi solamente a quella prodotta contem- « poraneamente sull'orizzonte politico dalla rivoluzione fran- « cese ». Si riteneva d'aver scoperta la più nobile delle forze, quella che anima il sistema nerveo-muscolare, la forza vitale.

Digitized by Google

Studi del Volta anteriori alla scoperta del Galvani.

Quando il GALVANI rendeva pubblica la sua scoperta, ALESSANDRO VOLTA (1) aveva già acquistata in tutta l'Europa una ben meritata fama per i suoi lavori scientifici e specialmente per le sue scoperte nel campo dell'elettricità, che fin dai suoi anni giovanili aveva coltivato col più intenso fervore. Aveva esposto una nuova teoria sulle *atmosfere elettriche* per spiegare i fenomeni di induzione, attenendosi all'ipotesi unitaria del fluido elettrico del FRANKLIN; aveva trovato il suo *elettroforo perpetuo,* divenuto ben presto assai popolare come un mezzo semplicissimo per produrre grandi quantità di elettricità; aveva costruito la sua *pistola elettrica* e, modificandola, aveva derivato da essa uno strumento molto importante per l'analisi dei gas infiammabili e dell'aria, vale a dire *l'eudiometro.* Dall'elettroforo era giunto all'idea del *condensatore,* del quale espose la teoria in un'importante memoria letta nel 1782 alla Società reale di Londra. Aveva perfezionato l'elettroscopio e, combinandolo col condensatore, ne aveva ricavato un sensibilissimo strumento di misurazione, che gli permise di sviluppare i fondamenti dell'elettrometria. Col sussidio degli stessi strumenti aveva fatto poi degli studi pregevolissimi sull'elettricità che si sviluppa nell'evaporazione, nella combustione e nelle effervescenze e, quindi, sull'elettricità atmosferica.

Primi studi del Volta sul galvanismo.

Era naturale che il VOLTA fosse uno dei primi ad interessarsi dei nuovi fenomeni elettrici rivelati dal GALVANI. Già nel maggio del 1792 lesse all'Università di Pavia la sua prima memoria « Sull'elettricità animale » e riconobbe tosto

(1) Alessandro Volta è nato a Como nel 1745; fu nominato professore di fisica nel ginnasio della sua città nel 1775 e nel 1778 fu assunto alla cattedra dell'Università di Pavia, che tenne fino alla più tarda età.

Digitized by Google

l'importanza della scoperta e il merito che ne aveva il GALVANI; disse ch'era « una di quelle grandi luminose scoperte, « che meritano di far epoca negli annali delle scienze fisiche « e mediche, non tanto per ciò che ha in sè di nuovo, ma « perchè apre un largo campo di ricerche non meno interes- « santi che curiose e di utilissime applicazioni » (1).

Egli ripete le esperienze del GALVANI sulle rane e ne escogita parecchie altre. Constata che le contrazioni dei muscoli si possono ottenere anche con altri animali a sangue freddo, come lucertole e salamandre, ed anche con animali a sangue caldo, come uccelli, topi, agnelli ed altri.

Dapprima non mette in dubbio l'interpretazione data a questi fenomeni dal GALVANI col supporre l'esistenza di un'elettricità animale; ma già nell'estate dello stesso anno, colpito dall'osservazione che le contrazioni della rana si producevano assai difficilmente e spesso mancavano quanto l'arco conduttore non era formato di due metalli diversi, giunge ad attribuire la causa principale della produzione dell'elettricità al contatto fra i conduttori; continua, tuttavia, ad ammettere che, nel caso in cui l'arco sia formato di un solo conduttore, le convulsioni delle rana siano dovute ad un'elettricità di origine animale. Rileva, inoltre, la grandissima sensibilità delle rane alle scariche elettriche, anche debolissime, e come tale sensibilità vada diminuendo col tempo trascorso dopo la morte e dipenda anche dalle condizioni nelle quali questa è avvenuta.

Alla sua mente, del resto, s'era già affacciata una volta un'idea simile a quella che ora concepisce di fronte a tali fenomeni. S'è trovato un suo manoscritto (2), ch'è certamente anteriore al 1787, e forse di cinque anni, nel quale, trattando dell'elettrizzazione dei corpi per attrito e per pressione, soggiunge: « non vorrei neppur assicurare che di pressione faccia « bisogno; basta forse il contatto solo, e la pressione non che « altro promuove maggiormente l'effetto perchè adduce più « punti a contatto ».

---

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag. 16.
(2) Rendiconti dell'Istituto Lombardo, vol. LIX, fasc. VI-X.

Digitized by Google

Azione dell'arco bimetallico sopra i sensi.

Altre esperienze ed altre considerazioni lo convincono poi che tutti i fenomeni si possono spiegare con la semplice teoria del contatto, per cui non v'è alcuna ragione di supporre l'esistenza d'una elettricità animale. L'elettricità è di origine *metallica;* il corpo animale non ha che una funzione passiva, quella di condurre l'elettricità, e può essere sostituito da altro buon conduttore umido. Le membra della rana si comportano come un delicatissimo elettroscopio e perciò hanno rivelato fenomeni per i quali gli apparecchi allora conosciuti non avevano una sufficiente sensibilità.

Seguendo quest'ordine di idee, si propone di osservare gli effetti dell'arco bimetallico sopra un muscolo vivo. Sceglie a tale scopo la lingua, che gli pare meglio adatta perchè più libera da integumenti, e stabilisce l'arco metallico con un cucchiaio di argento ed una lamina di stagno, che mette a contatto con la punta e rispettivamente col dorso della lingua. Ma i movimenti, ch'egli s'attendeva, non si producono; sente, invece, finchè è mantenuto il circuito, un sapore speciale in bocca, alcalino al contatto dell'argento, acido al contatto dello stagno.

Cercando le ragioni di questo insuccesso, riconosce ben presto che il moto non s'era potuto produrre perchè i nervi che suscitano le contrazioni non avevano subito un sufficiente eccitamento essendo coperti dai tessuti; ritiene invece che la sensazione di sapore sia una conseguenza dello stimolo che avevano subito i nervi del gusto. Per ottenere il moto della lingua si sarebbe dovuto mettere allo scoperto ed eccitare direttamente i nervi del moto; poichè l'azione stimolante non si esercita sui muscoli, ma solo sui nervi; basta anzi, perchè si eserciti, com'egli constata, che una sola porzione del nervo subisca l'eccitamento dell'arco metallico. Per avere una conferma a queste sue argomentazioni, ripete l'esperienza sopra la lingua appena recisa di un agnello e poi anche di altri animali, e può infatti osservare com'essa si contragga e s'incurvi sotto l'azione dei metalli.

Il Volta non era il primo ad osservare la sensazione di sapore prodotta dall'arco bimetallico sopra la lingua. Era

Digitized by Google

stato preceduto da un filosofo svizzero, lo SULZER, il quale ne aveva scritto in una sua opera, pubblicata fin dal 1767, dal titolo: *Théorie des sensations agréables.* Lo SULZER, tuttavia, aveva fatta tale osservazione, come si può desumere dal tema del suo lavoro, a tutt'altro proposito, mentre il VOLTA vi fu condotto indipendentemente dalle sue considerazioni sulle proprietà dell'arco, e fu il primo a rivelare la natura elettrica del fenomeno.

In questo modo il VOLTA giunse alla conclusione che l'elettricità, agendo sopra i nervi, suscita quel moto o quella sensazione che corrisponde alla funzione specifica del nervo eccitato. Provò a mettere uno dei contatti metallici vicino al bulbo dell'occhio, ed ottenne una sensazione di luce; premendo uno dei metalli contro la pelle, dov'essa è più sensibile o vi sia una ferita, provò una puntura o un leggero bruciore; più tardi, stimolando il nervo acustico, n'ebbe una sensazione di suono.

Fece poi il confronto fra la sensazione di sapore che provava applicando alla lingua l'arco metallico e quella che otteneva facendo la stessa esperienza con due fili provenienti dai poli di una macchina elettrica, e dall'intensità della sensazione prodotta nei due casi dedusse che la quantità di elettricità messa in moto dall'arco metallico era molto maggiore di quella fatta circolare dalla macchina. Gli effetti dell'elettricità sui sensi gli servirono in seguito per valutare l'intensità della corrente e proprio la lingua gli fece assai spesso l'ufficio di galvanometro.

A tali risultati era giunto già nel primo anno di questi suoi studi. Nello stesso anno 1792, variando le esperienze sul sapore, pervenne alla costruzione di un apparecchio, che non differisce per nulla da un elemento della futura pila, com'egli lo descrive in una lettera inviata al fisico olandese MARTINO VAN MARUM (1): in un recipiente d'acqua sono immerse una lamina di stagno ed una di argento; con ciascuna di queste mette a contatto una spatola o cucchiaio di argento, che applica con l'altra estremità ad un punto della lingua. Quando chiude questo circuito, prova la sensazione del sapore.

---

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag. 140.

Digitized by Google

L'idea della corrente elettrica.

Lo studio del comportamento dei conduttori diversi posti a contatto in un circuito chiuso, lo convince sempre più della teoria fisica dei fenomeni galvanici e lo conduce ben presto all'idea della corrente continua, da cui sette anni più tardi giungerà alla costruzione della pila.

Fa distinzione fra i conduttori, che poi chiamò *di prima classe*, cui appartengono i metalli, il carbone, la grafite e altri minerali, e i *conduttori umidi* o *di seconda classe;* questi ultimi sono « o fluidi in tutta la massa o contenenti qualche « umore, fra i quali i corpi animali e tutte le parti fresche « e succose ». A questo punto delle sue ricerche inclina a credere « che i metalli tutti posseggano virtù e forza di at- « trarre il fluido elettrico dagli altri conduttori che comba- « ciano »; che questa forza sia grande nell'argento, minore negli altri metalli e minima nello stagno e nello zinco; per cui l'elettricità viene spinta nella direzione nella quale agisce la forza maggiore; « secondo tale direzione determinasi la « corrente e il giro di esso fluido; all'effettivo compimento « del quale ricercasi soltanto che comunicando in serie con- « tinua quei corpi umidi armati dai detti metalli, questi pure « comunichino fra loro, o immediatamente, o per mezzo d'altri « metalli interposti: corrente e giro, che come si è già detto, « continua sempre finchè non s'interrompano in alcun modo « le indicate comunicazioni » (1).

E poco dopo determina con chiarezza ancora maggiore: « se un conduttore di questa seconda classe trovisi di mezzo « a contatto di due di quelli di prima, di due metalli diversi, « ne viene che si determini una corrente continua di fluido « elettrico, secondo che l'azione su di esso in virtù di tali « combaciamenti prevale da una o dall'altra parte » (2).

I motori dell'elettricità sono dunque i metalli, ma la loro azione è localizzata nei punti di contatto fra essi e i conduttori

---

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag. 213 Seguito alla lettera a Tiberio Cavallo, del maggio 1793.

(2) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag. 290. Lettera terza ad Anton Maria Vassalli, del 1793.

Digitized by Google

umidi. Più tardi il VOLTA giungerà alla conclusione che l'azione dipende specialmente dal contatto fra gli stessi metalli.

La controversia sull'elettricità animale.

Le teorie del VOLTA non furono accettate dal GALVANI e da altri medici e professori di fisica dell'Università di Bologna. Si accese anzi una disputa, che, sebbene condotta in forma corretta e nel campo obbiettivo della scienza, si mantenne assai viva per parecchi anni e si estese anche fuori d'Italia, dividendo gli scienziati in due campi opposti. Insieme col GALVANI furono i principali sostenitori della teoria dell'elettricità animale, il suo nipote GIOVANNI ALDINI, insegnante di fisica nella stessa Università bolognese, EUSEBIO VALLI e GIUSEPPE FONTANA di Firenze. Il primo continuò a sostenere le idee del GALVANI anche dopo la morte di questi, avvenuta nel 1798.

L'ipotesi dell'elettricità animale era troppo avvincente per alcuni fisiologi, ai quali pareva di veder svelato con essa uno dei misteri dei processi vitali. D'altra parte dallo studio del *fluido galvanico* e da quello dei rapporti di questo con le funzioni degli organi, essi si ripromettevano la scoperta di nuovi mezzi terapeutici.

Anche la teoria voltiana trovò parecchi aderenti, alcuni in Italia, i più, come osserva lo stesso VOLTA, all'estero: fra essi il CARRADORI, i due CALDANI di Padova, il GREEN di Halle, il PFAFF di Kiel e il VAN MARUM di Harlem.

Dalle esperienze sull'azione dell'arco bimetallico sopra la lingua, il VOLTA trae un nuovo argomento da contrapporre ai suoi avversari. Osserva che il sapore è diverso secondo che la lingua è a contatto dell'uno o dell'altro metallo. Se l'origine dell'elettricità risiedesse nella lingua, tale diversità non sarebbe spiegabile; ma la lingua, « quando è da sè, non tende « nè a ricevere fluido elettrico, nè a dare fluido elettrico; ma « ne riceve e dà per la virtù e forza propria dei metalli, se« condo che è lo zinco o l'argento » (1). Facendo l'analoga

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag. 271. Lettera seconda ad Anton Maria Vassalli, del 1794.

Digitized by Google

esperienza con due conduttori comunicanti coi poli di una macchina elettrostatica, riesce a determinare la direzione della corrente. Questa ed altre esperienze gli confermano, inoltre, l'identità delle due elettricità.

I galvanisti riescono ad ottenere le convulsioni della rana senza far uso dell'arco metallico. Il GALVANI afferma che « portando in contatto diretto il muscolo della coscia col « nervo ischiatico corrispondente, su cento volte in alcune « solamente mancano le convulsioni ».

Il VOLTA però spiega l'esperienza coll'ammettere che anche in seguito al contatto di conduttori di seconda classe fra loro possa prodursi la corrente. Rileva che tuttavia le contrazioni della rana senza l'arco metallico avvengono difficilmente e soltanto per breve tempo dopo la morte dell'animale, stabilendo il contatto dei nervi all'innesto dei tendini, specialmente quando le parti sieno imbrattate di sangue o vi sia interposta una quantità anche piccola di liquido salino o alcalino, insomma quando vi siano dei contatti fra conduttori dissimili.

Si ottennero le contrazioni anche con un solo metallo, ma il VOLTA dimostrò che in ogni caso vi era qualche eterogeneità della materia alle due estremità dell'arco; la quale poteva dipendere da tempere diverse o da differenze di temperatura nella parti metalliche vicine ai due contatti. In questo modo il nostro fisico rivelava la prima volta un fenomeno di termoelettricità.

Il VOLTA riuscì infine a presentare delle esperienze nelle quali si dimostrava la produzione di elettricità senza il concorso di alcun corpo animale, col solo contatto dei conduttori dissimili, ma allora i suoi avversari obiettarono che il fluido da lui ottenuto con questi mezzi era cosa diversa dal *fluido galvanico*.

Il GALVANI stesso, riferendosi alle teorie del VOLTA, scrive: « Egli vuole la elettricità stessa che la comune a tutti i corpi; « io particolare e propria dell'animale: egli pone la causa « dello sbilancio negli artifizi, che si adoperano, e segnatamente nella differenza dei metalli, io nella macchina animale; egli stabilisce tal causa accidentale ed estrinseca; io « naturale ed interna: egli insomma tutto attribuisce ai me-

Digitized by Google

« talli, nulla all'animale, io tutto a questo, nulla a quelli, « ove si consideri il solo sbilancio » (1).

Il conflitto delle idee fu dunque assai vivo, ma spinse gli studiosi a fare molte e utili indagini e giovò certamente al chiarimento delle idee e al progresso degli studi.

La legge delle tensioni dei conduttori della prima classe.

Senonchè, anche senza questo incentivo, alla mente del VOLTA si affacciavano sempre nuovi problemi da risolvere, offerendogli argomento di ulteriori indagini. Ad uno che gli aveva chiesto una volta come avesse trovato la pila, rispose: « l'ho trovata sulla mia strada ». Infatti pare ch'egli proceda per una via chiaramente tracciata, che deve condurlo ad altre mète.

Si può seguirlo nel suo ulteriore cammino leggendo le tre lettere che scrive negli anni 1796-1797 al prof. GREEN di Halle. Nella prima di queste descrive altre combinazioni di conduttori, nelle quali vi può ravvisare l'elemento della futura pila: « I conduttori della seconda classe... possono essere delle « tazze d'acqua, in cui peschino rispettivamente la lamina o « le verghe metalliche; possono essere delle spugne, pezzi di « corda, di pelle, di cartone, corpi imbevuti bene di umor « acqueo » (2).

Nella seconda lettera annucia una nuova serie di esperienze ch'egli ha istituite per dimostrare, coi comuni strumenti rivelatori dell'elettricità, l'elettrizzazione ottenuta col porre semplicemente a contatto due piattelli di differenti metalli. Nelle prime prove si è servito di un apparecchio moltiplicatore, del *duplicatore a molinello* del NICHOLSON, e del condensatore da lui stesso trovato.

Fino allora aveva supposto che l'azione che muove il fluido elettrico, derivasse specialmente dal contatto fra i

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag. 525.
(2) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag. 399.

Digitized by Google

conduttori umidi e i metalli. Dopo queste nuove osservazioni, reputa invece che nei circuiti formati da metalli e conduttori umidi, per la produzione dell'elettricità, « molto più al con- « tatto di essi metalli vuole attribuirsi che ai combaciamenti « dei rispettivi conduttori umidi » (1).

Nella lettera seguente riferisce d'aver esteso molto e perfezionato queste esperienze. Portando a contatto ripetute volte un piattello di argento con uno di stagno, e caricando con uno di questi un condensatore, riesce ad ottenere divergenze notevoli anche con un comune elettroscopio a foglioline e, caricando una piccola bottiglia di Leida, persino delle scintille. Suscita il più vivo stupore in chi assiste a queste esperienze il vedere come il semplice « toccamento di due metalli » basti a produrre manifestazioni così notevoli di elettrizzazione. Ed invero erano neccessarie una rara perizia e grande abilità per riuscire a mettere in evidenza fenomeni di così esigua intensità.

In una lettera indirizzata all'ALDINI, del 1798, espone le leggi delle tensioni dei conduttori di prima classe; più chiaramente sono enunciate queste leggi in una sua memoria posteriore: (2) « E così formando una tabella, o scala, che di- « scende, secondochè uno spinge il fluido elettrico in un altro « (nella quale scala i principali si succedono come segue: « ossido di manganese nero, piombaggine, carbone, oro, ar- « gento, mercurio puro, rame, ferro, stagno, piombo, zinco), « sempre il superiore in detta tabella, il quale tocchi imme- « diatamente un inferiore di quanti gradi si voglia, vi spin- « gerà il fluido elettrico con una forza eguale alla somma « della forze dei gradi intermedi. Dalla quale legge infine « risulta, che in ogni combinazione, ossia serie di metalli « eterogenei la *tensione elettrica* ai due estremi è quella stessa, « nè più nè meno, che si avrebbe al contatto immediato del « primo coll'ultimo ».

Le forze elettromotrici devono annullarsi e non possono dare corrente nel caso che il circuito sia formato di soli con-

---

(1) Ibid., pag. 419.

(2) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. II, pag. 224. « Sull'identità del fluido elettrico col fluido galvanico », art. 2°.

Digitized by Google

duttori della prima classe. Così alternando nel circuito delle piastrelle di zinco e di argento « si vede chiaro che ogni « piastretta di zinco, trovandosi in contatto sopra e sotto a « due di argento, e quindi le forze che spingono il fluido « elettrico da questo a quel metallo essendo in opposizione, « si eliderebbero esse vicendevolmente in guisa che non avan- « zerebbe da tal conflitto altro che quella picciola forza, che « corrisponde all'azione di una coppia sola, nel caso che la « serie cominciasse da un metallo e finisse con l'altro... e « niuna affatto nel caso che la prima e l'ultima piastra fos- « sero del medesimo metallo » (1).

È, infine, interessante l'osservare com'egli accosti di nuovo il fenomeno dell'elettrizzazione dei conduttori per contatto a quello dell'elettrizzazione dei coibenti per strofinamento, rilevando le analogie, che le moderne teorie, fondate sulla struttura atomica dell'elettricità, hanno ancor meglio chiarite:

« La tendenza adunque del fluido elettrico a passare da « un corpo nell'altro ha luogo, e si esercita dovunque ven- « gano a contatto due fra loro diversi, ossia nasce e risulta « da tal contatto medesimo (per qual ragione, e in qual modo, « non saprei dire ancora, ma è un fatto generale, una legge « che credo avere abbastanza stabilita con le esperienze). Ove « pertanto nulla osti, come nel contatto di due metalli, od « altri buoni conduttori, il fluido passa effettivamente con « piena libertà; e in quantità corrispondente a tale tendenza, « ed è inutile affatto qualunque pressione, o stropicciamento; « ove all'incontro a tal passaggio oppongasi qualche coibenza « maggiore o minore d'uno dei corpi, o d'ambedue, la pres- « sione, la percossa, e massime lo stropicciamento sono più « o meno validi aiuti a vincere tale resistenza o difficoltà; « e in tanto lo sono, secondo io penso, in quanto rendono « per avventura la superficie coibente, e in quei punti che « soffrono detto stropicciamento o pressione, per quei punti che « lo soffrono, non più coibente, ma più o meno deferente, « ossia permeabile al fluido elettrico: la rendono tale mercè « l'agitazione indotta nelle minime parti, la mutata lor posi-

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. II, pag. 60. « Memoria sull'identità del fluido elettrico col fluido galvanico ».

Digitized by Google

« zione, od altri forzosi momentanei cambiamenti, in quella « guisa, che anche un forte calore rende permeabile allo « stesso fluido elettrico, e buon conduttore il vetro ed altri « corpi di lor natura affatto coibenti » (1).

L'invenzione della pila.

Nel 1799, tre anni dopo che i Francesi avevano occupata la Lombardia, la bufera della guerra imperversava di nuovo sul paese. Le truppe austriache ne cacciavano i Francesi e lo rioccupavano, per tenerlo, tuttavia, solo per breve tempo. L'Università di Pavia veniva chiusa; dei professori alcuni erano imprigionati, altri destituiti. Il VOLTA si ritirava nella sua Como, per attendere, in mezzo al frastuono delle armi, con maggior intensità ai suoi studi. Allora giunse all'invenzione della pila.

Mancava ormai un solo passo per arrivarvi, ma non era il più facile. Doveva trovare il modo di moltiplicare la forza elettromotrice prodotta dal contatto delle diverse combinazioni di conduttori in modo da ottenere più considerevoli effetti. La legge sulle tensioni dei conduttori di prima classe gli aveva appreso che tale scopo non si poteva raggiungere coll'introdurre nel circuito dei conduttori di questa specie comunque disposti. Pareva dunque, narra egli stesso, che l'impresa fosse disperata, quando gli venne l'idea di far comunicare più coppie metalliche con strati umidi, pensando che « l'azione dei con- « duttori umidi coi metalli che combaciano essendo comune- « mente piccolissima, sarebbe stata ben lungi dal poter con- « trobilanciare quella dei detti metalli fra loro; e poco o « nulla l'avrebbe alterata, sia rinforzandola sia indebolen- « dola » (2). Questo modo di argomentare resta ancor oggi esatto purchè si attribuisca al contatto fra i metalli e i liquidi che compongono la pila, la causa principale della forza

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag 453. Frammenti e note (1797-1799).

(2) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. II, pag. 224. « Sull'identità del fluido elettrico col fluido galvanico ».

Digitized by Google

elettromotrice, che il VOLTA ricerca invece nel contatto dei metalli fra loro.

In questo modo pervenne alla legge, per la quale la forza elettromotrice di una serie di coppie metalliche formanti un solo circuito con strati alternati di un conduttore umido, è proporzionale al numero delle coppie, e da questa legge alla costruzione della pila. « Questo è il gran passo — disse più « tardi — da me fatto sulla fine dell'anno 1799, passo che « mi ha condotto ben tosto alla costruzione del nuovo appa- « rato scuotente » (1).

Della sua grande scoperta non diede notizia se non dopo aver studiato e perfezionato il nuovo apparecchio in maniera da poter presentare dei risultati in certo modo compiuti e definitivi. Nel marzo del 1800 la comunicò con una lettera diretta al presidente della Società reale di Londra, GIUSEPPE BANKS, affinchè egli la portasse a conoscenza di tutti i componenti quella accademia, la quale da parecchi anni aveva voluto annoverare il VOLTA fra i propri membri.

In questa lettera fa una descrizione particolareggiata tanto della pila a colonna quanto di quella a corona di tazze e descrive una serie di esperienze, che si possono eseguire con questi apparecchi, sugli effetti fisiologici della corrente. Incomincia col dire d'esser giunto alla « costruzione di un appa- « rato, il quale rassomiglia per gli effetti, cioè per le scosse « che è capace di dare e far sentire più o men forti nelle « braccia, ecc, alle comuni bocce di Leyden, o meglio ancora « alle batterie elettriche debolmente cariche, le quali agissero « però incessantemente, o di cui la carica si rimettesse tosto « da sè dopo l'esplosione, che godessero insomma di un'azione « sopra il fluido elettrico, od impulsione continua » (2).

Chiarisce poi come nelle due specie di apparecchi sieno diverse le tensioni dell'elettricità e le quantità di cariche che vengono messe in movimento, rilevando che la pila « resta « molto al di sotto dell'attività di queste batterie caricate

---

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. II, pag. 59. « Memoria sull'identità del fluido elettrico col fluido galvanico ».

(2) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. II, pag. 31. Lettere due al cav. Giuseppe Banks, marzo-aprile 1800.

Digitized by Google

« ad un alto grado, quanto alla forza e allo strepito delle « esplosioni, alla scintilla fulminante, e alla distanza a cui « può operarsi la scarica, uguagliando solamente gli effetti « di una batteria carica ad un grado debolissimo, di una « batteria però assai grande, avente una capacità immensa; « ma che d'altra parte supera infinitamente la virtù e il « potere di queste medesime batterie, perciò che il medesimo « non ha bisogno com'esse di venir preventivamente caricato « mercè di un'elettricità straniera e ch'egli è attivo sempre « da sè stesso e in perpetua tensione, ossia atto a dare la « commozione bastantemente forte della mano fino al gomito, « fino all'omero, ecc. tutte le volte che si viene a toccarlo nelle « debite forme, per frequenti che sieno tali toccamenti » (1).

Paragona la pila all'*organo elettrico naturale* posseduto dai ginnoti e dalle torpedini, che è pure formato di pellicole o strati membranosi sovrapposti l'uno all'altro, simile alle coppie metalliche, « fra i quali cola, come pare, qualche umore »; e la chiama perciò *organo elettrico artificiale.*

Ciò che doveva recare, naturalmente, maggior sorpresa era la continuità della corrente: « questa circolazione con- « tinua del fluido elettrico (questo moto perpetuo), può sem- « brare paradossale, inesplicabile, ma non è meno vero e « reale, e la si può toccare, per così dire, con le mani » (2).

Scoperte riguardanti la pila nel periodo voltiano.

Che la scoperta del VOLTA aprisse una nuova via importantissima alle ricerche scientifiche, fu tosto manifesto. Una falange di scienziati si mise a ripetere le sue esperienze e a studiare i nuovi fenomeni, sia per scoprire altre proprietà della corrente, sia per conoscerne meglio la natura o per trovare argomenti in favore dell'una o dell'altra teoria. Già i primi anni che seguirono all'invenzione della pila furono attivissimi di studi e fecondissimi di risultati.

---

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. II, pag. 33.

(2) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag. 576. Lettera al cav. Giuseppe Banks.

Digitized by Google

Pochi mesi dopo che a Londra fu nota la memoria del VOLTA, il CARLISLE e il NICHOLSON scoprivano la decomposizione dell'acqua prodotta dalla corrente. A questa seguirono rapidamente altre scoperte sui fenomeni chimici della corrente, cosicchè il VOLTA fu prevenuto nel dar notizia delle osservazioni che pur egli aveva fatto su questi fenomeni. Il chimico LUIGI VALENTINO BRUGNATELLI, suo amico e collega, riuscì nel 1805 a indorare con la pila una medaglia e scoprì la galvanoplastica. Il chimico inglese DAVY ottenne due anni più tardi con l'elettrolisi la separazione dei metalli alcalini e, in seguito, riuscì a produrre l'arco voltaico e a convertire il diamante in grafite. Sono questi successi che gli fecero esclamare: « La pila di VOLTA è la colonna di fuoco che ha illuminato e illumina i sapienti nel buio delle ricerche naturali ». Più tardi giudicò ch'essa aveva dato maggior incremento alla fisica e alla chimica che il miscroscopio alla storia naturale e il telescopio all'astronomia.

L'arroventamento e la fusione dei metalli furono osservati non appena si ebbe composta una pila di sufficente potenza, e al fisico tedesco TROMMSDORFF riuscì già nel 1801 di fondere, con una pila di 180 elementi, delle foglie d'oro, d'argento e di rame.

Relazioni fra l'elettricità e l'ago magnetico erano state osservate ancor prima della scoperta della pila. Era ovvio cercarle anche rispetto alla corrente. Già nel 1802 il celebre giureconsulto GIAN DOMENICO ROMAGNOSI pubblicava sulla Gazzetta di Trento d'aver osservato la deviazione d'un ago magnetico prodotta dalla corrente. Nel 1804 il conte MOROZZO DELLA ROCCA riferiva all'Accademia delle scienze di Torino, di cui era presidende, sulla magnetizzazione che un ago di acciaio subiva per effetto della corrente (1). Queste scoperte passarono tuttavia inosservate e appena nel 1819 e nel 1820, ritrovate dall'OERSTED e dall'ARAGO, divennero oggetto di più profondi studi.

Troppo lungo sarebbe l'enumerare le diverse modificazioni e varietà di pile escogitate dopo quella del VOLTA. Le

(1) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences, Littérature et Beaux Arts pour les années XII-XIII, 1805, pag. 89.

Digitized by Google

sue teorie sulle combinazioni degli elettromotori le contenevano tutte in germe. Nel 1801 il francese GAUTHEROT osservava che congiungendo fra loro i poli di un apparecchio elettrolitico, dopo che una corrente vi aveva decomposta l'acqua, col rigenerarsi di questa si produceva una nuova corrente di senso inverso a quella che aveva prodotta la decomposizione; e scopriva così la corrente di polarizzazione. L'accumulatore ebbe un'anticipazione in un apparecchio costruito nel 1803 dal fisico tedesco RITTER: era formato di piastrelle di rame alternate con strati di panno imbevuti di una soluzione di solfato di rame; questo apparecchio, dopo esser stato attraversato per qualche tempo dalla corrente di una pila, diventava a sua volta fonte di elettricità. Il RITTER suppose che si caricasse come una batteria di condensatori o di bottiglie di Leida; ma il VOLTA spiegò il fenomeno come quello di una pila secondaria. Anche questa scoperta non ebbe seguito che assai più tardi.

Il Volta a Parigi.

Se tutte queste scoperte provano l'ardore col quale gli scienziati di allora si diedero a studiare i fenomeni rivelati dall'invenzione della pila, altri fatti dimostrano quanto fosse generale l'interessamento per questi studi e come fosse sentita l'importanza che avrebbero potuto avere per il progresso della scienza e per le applicazioni alla pratica.

NAPOLEONE BONAPARTE, dopo aver condotte a termine vittoriosamente le azioni guerresche intraprese contro i nemici della Francia, divenuto primo Console, si accingeva a promuovere le opere di pace, non ultimi gli studi scientifici. Per sua iniziativa il VOLTA fu invitato a Parigi, per riferire, dinanzi all'Istituto nazionale di Francia, intorno alla sua grande scoperta. Egli vi andò, dopo qualche esitazione, nel 1801, insieme col prof. BRUGNATELLI. Nel recarsi presso NAPOLEONE confidava di poter patrocinare nello stesso tempo gli interessi dell'Università di Pavia, che allora era stata riaperta, e quelli della patria. Accettò pertanto anche l'incarico di portare al primo Console i ringraziamenti di quell'istituto per l'avvenuta riapertura.

Digitized by Google

I due scienziati italiani s'intrattennero a Parigi per quattro mesi. Il VOLTA, come usava sempre nei suoi viaggi, si mise in relazione con tutto il mondo intellettuale della capitale, e vi ebbe accoglienze trionfali; da NAPOLEONE fu fatto segno a speciali attenzioni.

Fece la sua relazione dinanzi all'Accademia in tre sedute, che si tennero nel novembre dello stesso anno, e la illustrò con numerose esperienze. Più tardi pubblicò questa relazione col titolo: « Sull'identità del fluido elettrico col fluido galvanico ». I galvanisti non potevano disconoscere l'importanza dei nuovi fatti presentati dal VOLTA in opposizione alla teoria dell'elettricità animale, tuttavia ora sostenevano che il *fluido galvanico* era una cosa diversa dall'elettricità della pila. In quel tempo, per trovare una spiegazione a nuovi fenomeni, si ricorreva con facilità all'ipotesi di fluidi diversi e persino a quella della trasformazione di un fluido in un altro. Il VOLTA affermò sempre l'identità della causa nelle esperienze del GALVANI e in quelle relative alla pila e alle macchine elettrostatiche.

NAPOLEONE BONAPARTE, ch'era presidente dell'Accademia, volle intervenire personalmente a tutte le sedute nelle quali parlò il VOLTA; dimostrò il più vivo interesse all'argomento e prese più volte la parola per fare le proprie osservazioni e chiedere chiarimenti. Infine propose che l'Accademia decretasse al fisico italiano una medaglia d'oro in riconoscimento della sua opera e che nominasse una Commissione speciale, alla quale fosse affidato il compito di eseguire in grande tutte le esperienze atte a spandere della luce sul nuovo campo di studi. A far parte di questa Commissione furono chiamati i seguenti accademici: LAPLACE, COULOMB, MONGE, CHASLES, VAUQUELIN, PELLETAN, BRISSON, SABATIER, GUYTON e BIOT, che funse da relatore; vi furono aggiunti il VOLTA e il BRUGNATELLI per il tempo della loro permanenza a Parigi. Le conclusioni del VOLTA vennero diffuse su molti giornali scientifici e trovarono l'adesione di parecchi scienziati.

Il BONAPARTE, inoltre, fece assegnare al VOLTA un importo di 6000 franchi e raccomandò la sua elezione a membro dell'Istituto; ma questa avvenne soltanto nel 1803. Lo nominò poi fra i membri notabili della Consulta, che proprio allora doveva radunarsi a Lione, per discutere la legislazione della Repubblica Cisalpina da lui istituita. Cosicchè il VOLTA

Digitized by Google

vi si recò direttamente da Parigi ed ebbe quindi la possibilità di dare la sua opera per gli interessi del suo paese. In seguito ebbe altre distinzioni e onori: fu insignito dell'ordine della Legion d'onore e, quando NAPOLEONE si fece proclamare Re d'Italia, fu fatto da lui conte e senatore del nuovo Regno.

Il BONAPARTE volle infine che fosse istituito « un premio « consistente in una medaglia d'oro di 3000 franchi per la « migliore esperienza che sarà fatta nel corso di ogni anno « sul fluido elettrico, e un secondo premio di 60.000 franchi « per colui che con le sue esperienze e scoperte farà fare al « galvanismo un passo paragonabile a quello che hanno fatto « fare a queste scienze FRANKLIN e VOLTA... il mio scopo « speciale essendo — continua egli nella lettera inviata a « questo fine all'Istituto — quello di incoraggiare e fissare « l'attenzione dei fisici su questa parte della fisica, che è, a « mio avviso, la via di grandi scoperte ».

La Commissione incaricata di riferire sulle esperienze del VOLTA ebbe poi anche ad elaborare la proposta per l'istituzione di questi premi. Nella sua relazione riconobbe che « il galvanismo segnerà nella storia delle scienze un'epoca memorabile, poichè poche scoperte hanno fornito alla fisica e alla chimica tanti fatti nuovi e così diversi da quelli che precedentemente erano conosciuti » (1).

Questa fondazione fu poi convertita in una di 50.000 franchi e chiamata *Premio Volta.* Esso venne conferito nel 1864 al RUHMKORFF per la costruzione del rocchetto d'induzione, nel 1880 al GRAHAM-BELL per l'invenzione del telefono e nel 1888 al GRAMME per la costruzione delle dinamo industriali (sebbene il nostro PACINOTTI avesse costruito per il primo, già nel 1861, un modello di dinamo reversibile).

Ultimi lavori del Volta sulla corrente elettrica.

I fatti nuovi che venivano continuamente alla luce per opera di tanti studiosi nel campo delle ricerche seguite alla scoperta del VOLTA e le teorie diverse che venivano escogi-

---

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. II, pag. 122-123. Prix fondé par le premier consul Bonaparte.

Digitized by Google

tate per rendersi conto della corrente e dei suoi effetti, davano sempre nuovo argomento di studi e di discussioni.

Gli oppositori alla teoria del VOLTA erano specialmente in Italia. Sulla natura dell'elettricità avevano le idee più diverse, alcune per noi veramente sorprendenti: qualcuno riteneva che la pila trasformasse l'idrogeno in fluido galvanico; altri che il fluido elettrico venisse in qualche modo modificato dagli organi animali; il DE LUC in Francia opinava invece che il fluido elettrico, identico in origine a quello galvanico, si modificasse entro la pila. L'abate A. MARIA VASSALLI, ad onta delle argomentazioni oppostegli dal VOLTA, giunse alla conclusione che: « il n'y a donc point de doute que le « fluide de la pile qui secoue si fortement, n'est pas de la « nature du fluide électrique de la bouteille; car s'il en était, « il produirait une divergence plus de mille fois plus grande, « au lieu qu'il n'en produit aucune sur mon électromètre » (1). Da queste parole si comprende quanto riuscisse difficile ad alcuni di distinguere nei fenomeni elettrici le caratteristiche dipendenti dalla tensione da quelle dovute alle quantità di carica messe in movimento.

Frattanto il VAN MARUM a Harlem caricava con le pile delle grandi batterie di bottiglie di Leida, per dimostrare, secondo i suggerimenti del VOLTA, l'identità dei due fluidi, e il PFAFF di Kiel scriveva: « Le mot *Galvanisme* doit etre « banni à jamais de la science; il a eté vraiment nuisible, « mais comment le remplacer? » (2).

Allora il VOLTA scrisse la sua ultima memoria « Sulla « identità del fluido elettrico col fluido galvanico vittoriosa- « mente dimostrata con nuove esperienze ed osservazioni ». L'Accademia di Modena aveva bandito, nel 1805, un concorso per un lavoro che doveva « esporre con chiarezza, con dignità « e senza offesa di alcuno la questione sul galvanismo fra gli « egregi nostri soci signor Giovanni Aldini e il signor Ales- « sandro Volta ». Il VOLTA dettò la sua memoria al suo amico e discepolo dottor BARONIO, il quale la presentò ano-

---

(1) VASSALLI: *Sur la nature du fluide galvanique.* Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Turin. T. XIII, 1805.

(2) A. VOLTA jun.: *A. Volta e il suo tempo.* Milano, pag. 86.

Digitized by Google

nima al concorso. Essa fu pubblicata appena nel 1814 per opera del prof. PIETRO CONFIGLIACHI, successore del VOLTA nella cattedra di Pavia, ma questi non diede a conoscere a pieno la paternità del lavoro, che è stata messa in luce appena di recente in base all'esame dei manoscritti.

In questa memoria appariscono più che mai complete le teorie voltiane intorno alla pila e più che mai chiari e precisi i concetti fondamentali intorno alle caratteristiche della corrente. Senza disporre di uno strumento da poter in qualche modo confrontare col galvanometro, il VOLTA riesce non solo a mettere in bella evidenza i concetti di tensione, capacità e quantità di elettricità, ma anche a rilevare quelle condizioni che determinano ciò che oggi si chiama l'intensità della corrente.

Discute di nuovo ampiamente le differenze e le analogie fra i fenomeni che si osservano con le pile e le bottiglie di Leida. Gli effetti, come le scosse e le scintille, sono i medesimi, se si prende a considerare una batteria di bottiglie di grandissima capacità, « di capacità infinita, cui porta l'azione incessante e perenne della pila ». Ma « la distanza a cui può « giungere la scintilla elettrica è in ragione semplicemente « della tensione o grado elettrometrico, e niente in ragione « della quantità di fluido, che porta una tal tensione, ossia « della capacità delle bocce o dei conduttori » (1), laddove con maggior copia di fluido si ottiene « una scintilla più piena, « più grossa, più scuotente ». Quanto agli effetti sui nervi osserva: « La scossa è in ragione composta della tensione e « della quantità del fluido elettrico » (2). Aggiunge ancora che le leggi sulla distanza esplosiva soffrono delle eccezioni e delle limitazioni, ch'egli dimostra con varie esperienze.

Istituisce poi altre esperienze per dimostrare che un grosso strato d'acqua, compreso fra due lamine di 40 pollici quadrati di superficie, oppone una maggior resistenza al passaggio della corrente, massime se l'acqua è pura, che un sottilissimo filo

---

(1) *Le opere di Alessandro Volta*. Edizione nazionale, vol. II, pag. 242 « Sull'indentità del fluido elettrico col fluido galvanico ».

(2) Ibidem, pag. 248.

Digitized by Google

metallico. « Quanto poco conduttrice è dunque l'acqua (con-
« vien pure ripeterlo) in paragone dei metalli: calcolando da
« quanto deb'essere più spaziosa la strada dell'acqua, che in
« un metallo qualunque, per lasciar passare con eguale facilità
« e prontezza un grosso torrente elettrico, ossia una data
« quantità di questo fluido elettrico in egual tempo, dobbiamo
« dire che sia non centinaia, ma migliaia, ma milioni di volte
« meno conduttrice quella che questi » (1).

Per avere una corrente che stimoli più intensamente gli organi animali, « è facile intendere » — osserva il VOLTA — « quanto sia importante che tali conduttori umidi lo siano a « dovere, che l'umore sia salino anzichè acqua schietta, che « non siano troppo prolungati, e sopratutto che una assai « ampia superficie presentino all'ingresso, o sortita del fluido « elettrico, e larghi pur sieno in tutto il tratto ch'esso deve « percorrere eccetto soltanto il luogo ove ha giustamente a « stimolare quelle tali fibre, cioè gli organi animali che ci « proponiamo di eccitare » (2). E con evidenza ancor maggiore aggiunge che « lo stimolo è tanto più efficace, quanto più « largo e non lungo passaggio si offre alla corrente elettrica « in tutto il giro, e quanto più stretto (3), nell'unico sito, in « cui trovansi quelle fibre o organi ».

Facendo agire continuatamente una macchina elettrostatica, si ottiene una corrente che produce sopra i sensi gli stessi effetti della pila. « Questa corrente continuata è per « tal conto simile a quella di un elettromotore, ma non è « già eguale, e la cede di molto per conto della quantità di « fluido, che fa passare in dati istanti » (4).

Leggendo tali considerazioni sul comportamento della corrente elettrica, si deve riconoscere che non manca molto per avere quelle leggi, che nella loro forma matematica furono enunciate dall'OHM appena nel 1826.

---

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. II, pag. 261. « Sull'identità del fluido galvanico col fluido elettrico ».

(2) Ibidem, pag. 289.

(3) Ibidem, pag. 282.

(4) Ibidem, pag. 282.

Digitized by Google

Altri studi sull'elettricità animale.

Allorquando il VOLTA era riuscito a dimostrare l'elettrizzazione per il semplice contatto dei conduttori dissimili senza alcun concorso del corpo animale, pareva che la sua teoria dovesse trionfare definitivamente. Ma non fu così. La disputa sull'interpretazione dei fenomeni elettrici si riaccese più volte fra gli scienziati e si protrasse, con alterna fortuna per l'una o l'altra concezione, per oltre un secolo.

Non furono abbandonati gli studi sull'elettricità animale, sia perchè si ritenesse che i nuovi fatti scoperti non escludessero l'esistenza di una tale elettricità, sia perchè si credesse possibile l'esistenza di fluidi diversi come cause di differenti fenomeni. Tali ricerche, tuttavia, interessavano piuttosto la fisiologia, mentre gli studi del VOLTA si rivolgevano alla fisica.

Nè il VOLTA fu assolutamente contrario ad ammettere un'elettricità animale, come apparisce da una minuta di lettera scritta da lui verso la fine del 1798 (1). Ma tale elettricità, com'egli sostiene in questa lettera, non poteva essere originata da « pura forza organica », non poteva prodursi nelle membra recise come da un « meccanismo organico », siccome volevano i galvanisti; poteva soltanto aver origine nel cervello dell'animale vivente e scorrere attraverso i nervi per eccitare i muscoli volontari. Rileva che anche nelle torpedini il funzionamento dell'organo elettrico è provocato dalla volontà.

Dopo la scoperta della pila si volle provarne gli effetti sul corpo di animali morti ed alcuni scienziati, fra i quali l'ALDINI, il VASSALLI e l'inglese URE, estesero le esperienze all'uomo, eseguendole sopra i cadaveri di giustiziati. S'ottennero infatti le contrazioni di ogni specie di muscoli. Con la più grande emozione da parte degli spettatori si videro le teste recise aprire gli occhi e contrarre spasmodicamente i

---

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag. 552. Minuta di lettera al prof. Brugnatelli.

Digitized by Google

muscoli della faccia, i corpi ergersi con tutto il busto, agitare le braccia e le gambe e riprendere, persino, i moti della respirazione

> Quasi risorti ad improvvisa vita
> Rattrarre i nervi, e con tremor frequente
> Per incognito duol divincolarsi.

Si giunse persino a concepire la speranza di poter riattivare la vita già spenta di un uomo!

L'ALDINI credette di poter trarre anche da queste esperienze un argomento in favore dell'esistenza di un fluido galvanico diverso dall'elettrico.

Anche il VOLTA pensò alla possibilità di impiegare la sua pila nella medicina ed egli stesso fece delle prove col curare la sordità di una fanciulla, riuscendo ad ottenere qualche favorevole risultato.

Più tardi, quando fu costruito il galvanometro, e precisamente nel 1827, LEOPOLDO NOBILI potè dimostrare l'esistenza di una corrente propria del corpo della rana procedente dai nervi ai muscoli e costruì una pila formata da una serie di cosce di rane. Gli studi sulle correnti animali furono approfonditi di molto dal DU BOIS RAYMOND e da CARLO MATTEUCCI. Questi provarono l'esistenza di *correnti muscolari*, che circolano fra la superfice di ogni muscolo e il suo interno o la sua estremità tendinosa, stabilendo un arco conduttore fra queste parti diverse, e quella di *correnti nervee* fra la superfice e l'interno dei nervi, eseguendo le esperienze anche su animali vivi. Simili studi furono fatti dal BERNSTEIN, da EDMONDO BEQUEREL, dal RANKE e da altri.

Le correnti animali possono essere la conseguenza di azioni biochimiche, che avvengono nelle fibre dei tessuti, o di squilibri di temperatura causati dalle funzioni biologiche. Non risulta, tuttavia, provato che l'elettricità presieda ai fenomeni del moto e delle sensazioni. Esistono bensì delle forze elettromotrici che hanno sede nel corpo animale, come sostenevano il GALVANI e i suoi seguaci, ma non è trovata una risposta definitiva a quella ch'è stata forse la questione principale da essi sollevata.

Digitized by Google

Le teorie chimiche della pila.

Alla teoria del contatto contese ancora il campo la teoria chimica della pila; l'una e l'altra ebbero per un lungo tempo autorevolissimi sostenitori.

Il primo a cercare la causa dell'elettricità nei fenomeni chimici è stato il prof. GIOVANNI FABBRONI, nel 1792, cioè l'anno dopo la pubblicazione della scoperta del GALVANI, a Firenze. Egli aveva osservato che, mettendo fra loro a contatto due metalli, che peschino con una delle loro estremità in un liquido, avvengono dei fenomeni chimici, come l'ossidazione di almeno uno dei metalli. Suppose quindi che anche nell'esperienza del GALVANI avesse luogo un'azione chimica fra i metalli e il corpo umido della rana e quest'azione fosse la causa delle contrazioni.

Quando il NICHOLSON, subito dopo l'invenzione della pila, scoprì i fenomeni chimici che accompagnano la corrente, avanzò tosto la supposizione ch'essi ne fossero la causa. Ma il VOLTA, discutendo questa ipotesi, sostiene che « l'azione chimica è l'effetto, ma non la causa della corrente ». Fu poi il GAUTHEROT a formulare esplicitamente il principio che la corrente dipendesse da possibili combinazioni fra gli agenti chimici che costituiscono la pila; lo seguirono il RITTER in Germania, il WOLLASTON in Inghilterra ed altri.

In seguito furono continuate per oltre un secolo le ricerche per trovare un argomento decisivo in favore dell'una o dell'altra tesi. I sostenitori della teoria del contatto contrapposero l'assenza del fenomeno chimico nella produzione della differenza di potenziali fra due metalli; ma i fautori della teoria chimica cercarono di dimostrare che una tale azione poteva derivare da uno strato microscopico di umidità interposto fra i due metalli o da strati di gas, che aderiscono in istato di alta tensione ai metalli. Il fatto decisivo non potè essere addotto.

La teoria chimica non era sufficente a spiegare certi fatti constatati, come la legge del VOLTA sulla scala delle tensioni dei conduttori della prima classe e la produzione delle correnti termoelettriche; mentre la teoria del contatto lasciava inspiegati altri fenomeni, come il cambiamento di senso della

Digitized by Google

corrente di una pila, nella quale restano uguali i metalli e cambia solamente il liquido.

Se al prodursi della corrente s'accompagnano sempre dei fenomeni chimici, tale concomitanza non permette ancora di decidere quale dei due fenomeni sia veramente la causa e quale l'effetto. Ogni teoria era quindi, dapprima, una pura affermazione dell'uno o dell'altro principio. Ma la teoria chimica acquistò un maggior credito, quando si svilupparono i nuovi principi sulla conservazione e sulla trasformazione dell'energia. Il FARADAY, nel 1840, spinto dai suoi studi di elettrochimica ad occuparsi di tale questione, giunse alla conclusione che la causa della corrente, che è una manifestazione di energia, non può risiedere nel semplice contatto di due corpi, ma deve procedere da un fenomeno chimico; poichè altrimenti si avebbe una produzione di energia dal nulla. Egli afferma che « la corrente non è altro che energia chimica circolante ».

Valore dell'opera voltiana.

Una decisione ultima a favore dell'una o dell'altra teoria non era dunque facile, se per tanto tempo si protrassero le discussioni e si poterono addurre tanti argomenti favorevoli e contrari all'una e all'altra.

Il VOLTA s'attenne costantemente alla teoria del contatto, perchè questa era la più semplice e fedele interpretazione dei fatti osservati; e tenne anche fermo all'idea che le varie specie di fenomeni, che al suo tempo si volevano attribuire a cause diverse, fossero pur sempre manifestazioni della stessa e unica elettricità, perchè non vedeva ragioni sufficenti per ammettere una teoria meno semplice della sua.

Discutendo sull'elettricità animale soggiunge: « Or se « questo principio, se tale, voglio dire, attività metallica sco- « perta e dimostrata evidentemente basta, a che ricorrere ad « un altro principio meramente supposto, di un naturale sbi- « lancio cioè di un fluido elettrico negli organi animali? Saria « questo un moltiplicare inutilmente le cause per effetti della « stessa natura. Stiamo a quello, che è direttamente e indu- « bitatamente provato: e non lasciamoci trasportare a con-

Digitized by Google

« getture e ipotesi in apparenza belle e seducenti; ma che « vane per lo più sogliono riuscire e inutili, quando trascen- « dono l'espressione delle più semplici e chiare esperienze » (1).

In questa tendenza, dal VOLTA costantemente perseguita, sta forse il maggior valore della sua opera e la ragione principale del suo successo. Mentre parecchi dei suoi contemporanei si lasciavano guidare da preconcetti infondati e da ipotesi metafisiche e lontane dalla realtà, egli preferiva quelle teorie che apparivano più aderenti ai fatti, più semplici e più feconde nel dar ragione dei fenomeni. In questo è stato il grande restauratore del metodo scientifico insegnato da GALILEO GALILEI e il vero iniziatore della scienza moderna.

La teoria moderna della pila e la concezione voltiana.

A distanza di un secolo dall'invenzione della pila altre scoperte nel campo dell'elettricità recarono nuova luce alle teorie elettriche e aprirono, in generale, nuovi orizzonti alla scienza. I fenomeni che accompagnano le scariche nei gas rarefatti, l'elettrolisi e la radioattività hanno rivelato la struttura atomica dell'elettricità e l'esistenza di una relazione intima fra essa e la materia. Queste scoperte hanno resa vana forse ogni teoria che non sia fondata sulle nuove conoscenze.

Gli atomi non sono che sistemi di *elettroni* o cariche elementari di elettricità negativa e *protoni*, provvisti di carica positiva, in mutuo equilibrio elettrico. Perdendo qualche elettrone o acquistandone qualcuno in più, gli atomi e certi gruppi atomici formano gli *ioni*, che non sono dunque più neutri. Questi ioni si trovano liberi nelle soluzioni diluite degli elettroliti e in quantità tanto maggiore quanto più grande è la diluizione. Sono essi che costituiscono, col loro moto, la corrente in seno a questi liquidi.

L'esistenza di tali ioni liberi nelle soluzioni degli elettroliti si dimostra anche col loro comportamento nei fenomeni osmotici. Secondo la teoria del VAN'T HOFF, soluzioni equi-

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. I, pag. 267-68.

Digitized by Google

molecolari di sostanze diverse (aventi cioè ugual numero di molecole per unità di volume della soluzione) devono esercitare una uguale pressione osmotica e produrre uguali aumenti della temperatura di ebollizione del solvente ed uguali abbassamenti della sua temperatura di solidificazione. Le leggi della pressione osmotica sono poi quelle determinate dalla termodinamica per i gas. Quando il corpo disciolto è un elettrolita, queste leggi patiscono in apparenza un'eccezione; esse cioè non sono pienamente verificate ove nel calcolo non si tenga conto degli ioni liberi esistenti nella soluzione e al numero delle molecole dell'elettrolita non si aggiunga quello degli ioni nei quali parte di esse sono scisse. In tal modo è dimostrata la loro presenza.

Prendendo due soluzioni di solfato di rame di differente concentrazione e immergendo in ciascuna di queste una piastra di rame, si può costruire una pila nella quale non vi è alcuna azione chimica fra i conduttori messi a contatto. Essa dà, tuttavia, una corrente, che ha per effetto un cambiamento nella concentrazione delle due soluzioni e continua a sussistere finchè questa concentrazione non diventi uguale in ambedue i liquidi.

Con la *teoria osmotica della pila,* enunciata nel 1889 dal NERNST, si fa derivare ogni differenza di potenziale che si stabilisce al contatto di due conduttori eterogenei, dal comportamento degli ioni, attribuendo a questi differenti velocità di diffusione.

Quando si trovano a contatto due soluzioni dello stesso elettrolita di differente concentrazione oppure due soluzioni di elettroliti diversi, gli ioni positivi e gli ioni negativi dell'una diffondono nell'altra con differenti velocità; in tal modo si produce, in generale, una differenza di potenziali fra i due liquidi. Si avrà l'equilibrio quando la forza elettrica dovuta a questa differenza di potenziali, sarà uguale alla presssione osmotica causata dalla diffusione. Questo stato di equilibrio determinerà la differenza di potenziali caratteristica per il contatto dei due elettroliti.

Quando un metallo viene immerso in una soluzione elettrolitica, degli atomi di esso tendono a passare nella soluzione diventando ioni positivi. Il fenomeno è simile a quello dell'evaporazione delle sostanze in uno spazio limitato, e, come

Digitized by Google

in questo caso, si stabilisce in vicinanza del metallo uno strato saturo di ioni, che costituiscono la carica positiva della soluzione, mentre il metallo resta elettrizzato negativamente. Alla pressione di saturazione dei vapori corrisponde la *tensione di soluzione* degli ioni metallici; a questa si contrappongono le forze elettriche derivanti dalla differenza di potenziale che si è stabilita fra il liquido e il metallo.

In modo simile si può spiegare anche la formazione di una differenza di potenziale per il contatto di due metalli. Basta ammettere una diffusione degli ioni di un metallo in un altro e differenti *tensioni di soluzione* per i vari ioni. Poco differirebbe da questo fenomeno quello della elettrizzazione dei corpi per strofinamento; in qualche caso s'è già constatato che questa è dovuta al passaggio di elettroni dall'uno all'altro corpo, promosso dallo strofinamento.

La somma algebrica delle differenze di potenziali che si stabiliscono, per queste proprietà degli ioni, ai vari contatti fra i conduttori diversi costituenti la pila, ci dà la sua forza elettromotrice. Quando si chiude il circuito della pila per mezzo di un filo metallico, il moto degli elettroni attraverso il filo tende ad uguagliare le differenze di potenziale e ad annullare le forze elettriche che si oppongono all'osmosi; per cui gli ioni positivi continueranno a separarsi, per la diffusione, dai negativi; gli stessi ioni costituiranno la corrente nell'elettrolita.

Per qualche elemento voltaico si è calcolata la forza elettromotrice che dovrebbe avere prendendo per base la legge sulle pressioni osmotiche di VAN'T HOFF. Per determinare l'effetto derivante dal contatto fra un metallo e l'acido, si pone la tensione di soluzione del metallo proporzionale alla concentrazione degli ioni nella soluzione (vale a dire al loro numero per unità di volume della soluzione) e alla temperatura assoluta della stessa. Si stabilisce quindi l'equazione fra questa tensione e la forza elettrica del campo agente in senso contrario. I risultati dati da questo calcolo per la pila di DANIELL, senza tener conto delle differenze di potenziali dovute al contatto fra i metalli e a quello fra i due liquidi, che si sono ritenute trascurabili, corrispondono in modo soddisfacente a quelli dell'esperienza.

Digitized by Google

Questa teoria della pila viene a togliere la questione tanto dibattuta fra la teoria chimica e la teoria del contatto, se cioè il fenomeno chimico è causa o effetto del fenomeno elettrico, essendo l'uno e l'altro determinati dallo stesso fatto, della separazione degli ioni e del loro diverso comportamento in seno alle sostanze costituenti il circuito.

Se ora mettiamo a confronto questa moderna concezione dei fenomeni della pila con la rappresentazione che ce ne dà il VOLTA nelle sua memoria letta all'Istituto di Francia, siamo colpiti ancora una volta nel vedere a quale mirabile intuizione egli fosse giunto nell'interpretare la realtà che aveva osservata. Parlando del mutuo comportamento dei metalli posti a contatto, egli si esprime nel seguente modo: « Questi « dunque, ben netti e tersi, ove si tocchino per uno o più « punti (ciò che è indifferente, sol che si tocchino veramente « a nudo) sbilanciano e smuovono il fluido elettrico in guisa, « che esso passa dall'argento nello zinco diradandosi in quello « e condensandosi in questo; e in tale stato di condensazione « nell'uno e di rarefazione nell'altro mantiensi, ove i detti « metalli altra comunicazione non abbiano, altri conduttori « cioè, da cui ripeter possa l'argento il fluido perso, e in cui « versar possa il zinco l'acquistato; al che pur tendono con « forza proporzionata al seguìto sbilancio » (1).

Conclusione.

L'opera del grande Comasco nell'invenzione e nello studio della pila è stato apprezzata in altissimo grado dai suoi contemporanei, perchè già allora si presentì, nel passo ch'egli aveva fatto fare alla scienza, l'importanza dei futuri progressi.

Alla distanza di un secolo, questi progressi appaiono più grandi e più meravigliosi di ogni aspettazione. Lo sviluppo avuto dagli studi sull'elettricità è stato tale da includervi un campo sempre più vasto di fenomeni, da estendere a poco a

(1) *Le opere di Alessandro Volta.* Edizione nazionale, vol. II, pag. 50. « Memoria sull'identità del fluido elettrico col fluido galvanico ».

Digitized by Google

poco le sue teorie a quasi tutta la fisica e ad altre scienze, da rivelare i misteri più reconditi della materia facendo conoscere l'intima costituzione dell'atomo; essi hanno contribuito a rendere sempre più unitaria la concezione scientifica di tutti i fenomeni.

Alle attività pratiche di ogni specie l'elettricità ha procurato le più preziose conquiste: mezzi potenti alle industrie e ai trasporti, col render facile la trasformazione e la trasmissione dell'energia a distanza e specialmente lo fruttamento di quella inesauribile delle acque; i mezzi più rapidi e diretti alle comunicazioni, con la telegrafia, la telefonia e la telefotografia, rese possibili anche attraverso lo spazio immateriale; i mezzi più sicuri per la diagnosi e importanti mezzi terapeutici alla medicina; a tutta la vita civile tali e tante applicazioni da dare veramente ai nuovi tempi una propria impronta.

Mentre dunque nella città ove nacque l'iniziatore della nuova scienza, una serie di mostre delle industrie elettriche nazionali, dei progressi fatti nel campo delle comunicazioni elettriche fino ai più recenti perfezionamenti e alle ultime scoperte, e le discussioni nei congressi di elettricisti e scienziati convenuti da tutte le parti del mondo, costituiranno la più gloriosa celebrazione dello scienziato italiano, apparirà più fulgida e più feconda l'opera sua.

Trieste.

GIACOMO FURLANI

Digitized by Google

Alessandro Volta ed i Chimici del suo tempo

Questo scritto non presume di dire cose nuove sopra Alessandro Volta, specie per i cultori delle materie scientifiche che hanno domestichezza con le opere in cui sono conservati i lavori ed il carteggio del grande scienziato (1).

È da queste opere che abbiamo tratto le notizie che seguono per precisare cose a molti già note ma solo nelle loro linee generali.

Parlando di Volta « princeps electricorum », in questo anno in cui ricorrendo il centenario della Sua morte (2), verrà glorificato in Como il Suo nome non sarà possibile non accennare anche ad argomenti di Fisica, benchè scopo nostro precipuo sia quello di trattare di Volta come chimico, e dei suoi rapporti con i più grandi chimici del suo tempo.

Crediamo quindi di non fare inutile lavoro raccogliendo ed ordinando fatti isolati e forse ignoti ai più nel loro insieme, e nel quadro delle cognizioni scientifiche del loro tempo.

Volta fu sempre divinatore; in qualunque ramo del sapere Egli portò l'attenzione sua, impresse l'orma del Genio, scrivendo sempre una pagina nuova.

---

(1) *Le opere di Alessandro Volta* (4 volumi). Edizione Nazionale. Ed. Hoepli, Milano. Anni 1918, 1923, 1926, 1927. — *La correspondance de A. Volta et M. Van Marum*, pubbliée par I. Bosscha, et notes par Bosscha, Leyde, W. Sijthoff. 1905. — *Nuova Enciclopedia di Chimica* diretta dal prof. Icilio Guareschi. Unione Tipografica Editrice Torinese. Torino. — *Collezione delle opere di Volta.* Tre tomi in cinque parti, editi da Vincenzio Antinori, nella Stamperia di Guglielmo Piatti. Firenze, 1816. — *Voltiana.* Tip. Arti Grafiche, Bari. Como, 1926.

(2) Alessandro Volta nacque in Como il 18 febbraio 1745 e vi morì il 5 marzo 1827.

Digitized by Google

Volta fu stretto da personale ed epistolare amicizia con i più illustri chimici del settecento: Brugnatelli (1761-1818), Lavoisier (1743-1794), Cavendisch (1731-1810), Priestley (1733-1804), Nicholson (1753-1815), Berthollet (1748-1822), Guyton de Morveau (1737-1816), Fourcroy (1755-1809), Vauquelin (1763-1829), e tra gli italiani predilesse Luigi Brugnatelli, suo collega dell'Università di Pavia.

Accennando ai nomi di cui sopra, li abbiamo chiamati chimici perchè le Loro più importanti scoperte riguardano la Chimica, scienza allora giovanissima e che richiamava a sè i maggiori ingegni; ma è opportuno ricordare che si dedicarono anche alla Fisica, dato che in quei tempi era quasi impossibile attendere in modo esclusivo all'una od all'altra di queste scienze sorelle.

E così fu di Volta, e così fu anche di Martino Van Marum (1): grandi fisici ma ad un tempo anche appassionati cultori della Chimica e delle Scienze Naturali. Martino Van Marum, direttore del Gabinetto di Storia Naturale della Società Olandese delle Scienze, e dei Gabinetti di Fisica e Storia Naturale del Museo di Teyler ad Haarlem, fu stretto al Volta dalla più salda amicizia, e celebre è la corrispondenza tra questi due scienziati.

Avendo il Volta ricevuto a Como un volume del Van Marum in cui erano descritti apparecchi perfezionati od inventati da questi per eseguire esperienze di Chimica, come: la sintesi dell'acqua, la condensazione dell'ammoniaca (descritta ed effettuata per la prima volta), ecc., così scrisse il 26 novembre 1798 all'amico Van Marum:

« Io amo molto la Chimica e sopra tutto la Chimica pneumatica che sono stato il primo a coltivare in Italia. Voi dovete conoscere le mie scoperte e le mie prime esperienze sull'aria infiammabile » (si chiamava così l'idrogeno). E qui ricorda le esperienze colla sua pistola e con il suo eudiometro con il quale *per il primo,* e prima del 1781, aveva dimostrato che l'aria infiammabile bruciando presso a poco con metà del suo volume di aria vitale (chiamata poi dal Lavoisier ossi-

(1) Martin Van Marum nacque a Groninga il 20 marzo 1750 e si spense ad Haarlem il 26 dicembre 1837. Fu un celebre fisico.

Digitized by Google

geno), scompariva riducendosi ad un semplice vapore che il Volta riconosce di non avere potuto caratterizzare per semplice acqua pur ripromettendosi di ripetere l'esperienza in un apparecchio simile a mercurio, con rubinetti di vetro. Riconosce però di avere dimostrato che non si produceva aria fissa (anidride carbonica), come Lavoisier ed altri scienziati dapprima credevano.

Nel suo viaggio a Parigi ed ad Amsterdam, nel 1781, il Volta fece vedere agli scienziati suoi colleghi l'eudiometro ad acqua con rubinetti di rame, che non poteva servire a raccogliere l'acqua, ma solo a provare la scomparsa delle due arie e l'esatto rapporto del miscuglio. Ed il Volta aggiunge:

« .... ciò indicava abbastanza bene il loro risolversi in acqua, per l'apparire di un vapore sotto forma di nebbia, che spariva poco dopo e si confondeva con il resto dell'acqua senza lasciare alcun residuo eterogeneo. Ecco dove ero arrivato io colle mie esperienze qualche anno prima che Lavoisier immaginasse ed eseguisse coi suoi nuovi apparecchi e coi suoi gasometri le famose esperienze di bruciare sul mercurio una grande quantità di aria infiammabile per mezzo di una combustione lenta, che gli fornì il mezzo di raccogliere una quantità di acqua abbastanza grande per potere verificare che il suo peso eguagliava quello delle due arie consumate. *Egli non fece quindi che verificare o completare la mia scoperta; riguardo agli apparecchi non fece che perfezionare la mia lampada ad aria o combinare questa col mio eudiometro* ».

È bene osservare che le esperienze del Volta per studiare le proporzioni nelle quali occorre mescolare i gas infiammabili con l'aria per ottenere la combustione completa, sono di vecchia data e si compirono, come si dirà, molto prima del 1781, anno in cui Cavendisch bruciando in adatti recipienti un miscuglio di ossigeno e di idrogeno, osservò che in seguito alla combustione erasi formata dell'acqua, che Egli osò riguardare come prodotto della combustione dei due gas. La medesima osservazione era stata fatta nel 1776 da Macquer e Sigaud-Lafond, e quattro anni dopo da Priestley, ma nessuno di questi Chimici ne aveva dedotta la precedente conclusione.

Lavoisier nel 1783 e poi nel 1785 assieme con Meusnier intraprese classici e decisivi esperimenti, determinando in

Digitized by Google

quale proporzioni di volume i due gas si combinavano, e paragonando il peso dell'acqua formata a quello dei gas che si erano uniti.

In questa stessa lettera del 26 novembre 1798 rivolta a Van Marum, Volta ricorda le sue passate esperienze sul gas delle paludi dimostrando che questo per bruciare aveva bisogno di una quantità assai maggiore di aria vitale, e che si formava in questa combustione molta aria fissa. Ed invero il Volta in una lettera al Padre C. G. Campi del 21 novembre 1776 chiama il gas delle paludi: « Aria infiammabile nativa delle paludi ». (Ora comunemente detto gas delle paludi o metane). Il Volta descrive questo gas e le località in cui si svolge in ben sette lettere al Padre C. G. Campi. È inutile fare notare la grande importanza della scoperta del Volta, essendo il metane il più semplice tra l'infinita serie degli idrocarburi.

Notevole è ancora il fatto che Volta distingue bene questa « aria » dall'aria infiammabile, dimostrando che mentre per questa il miscuglio più adatto per l'esplosione è di un volume per due volumi di aria, per l'aria infiammabile nativa delle paludi occorrevano invece da otto a dodici volte il suo volume di aria.

Ed in un'altra celebre lettera rivolta al Padre Barletti, professore nella Università di Pavia, e datata dal 18 aprile 1777, periodo nel quale dominava la teoria flogistica (1), distingue nettamente la infiammabilità dalla combustione, e sostiene che la fosforescenza proviene da una lenta ma vera combustione. Elogia altamente l'opera scientifica di Cavendisch e di Priestley, di cui difende le teorie contro la scuola di quei signori francesi che rimpastano cose vecchie già note, coll'aggiunta di una vernice.

Descrive con grandi particolari la sua pistola, strumento prezioso nello studio della Chimica Pneumatica e tratta appunto della sua utilizzazione per dare ulteriori lumi sulla infiammabilità dell'aria, per misurare esattamente la forza di esplosione, il consumo di aria in seguito all'esplosione di un miscuglio di aria comune e di aria infiammabile, ecc..

---

(1) Alessandro Volta fu tra i primi che adottò le nuove teorie chimiche, abbandonando la vecchia teoria flogistica, come Egli stesso scrive nella lettera del 26 novembre 1798 all'amico M. Van Marum.

Digitized by Google

Ancora il Volta asserisce che egli stando al terzo piano di una casa ha fatto, mediante fili conduttori, esplodere con una scintilla ricavata da una bottiglia di Leyda, la pistola posta sul limitare di una porta a piano con la strada. Ed a questo riguardo scrive per l'appunto così:

« Ma se il filo di ferro fosse sostenuto alto da terra da pali di legno piantati qua e là da Como a Milano, e quivi interrotto solamente dalla mia pistola, continuasse e venisse infine a pescare nel canale del Naviglio, continuo col mio lago di Como, non credo impossibile di far lo sparo della mia pistola a Milano con una boccia di Leiden da me scaricata in Como ».

In queste parole è evidente il concetto, espresso prima che da ogni altro dal Volta, di trasportare l'elettricità a distanza, e non manca chi in queste parole intravede un concetto divinatore della telegrafia per mezzo dell'elettricità.

Volta fu in grande domestichezza anche col Padre G. B. Beccaria (1716-1781), professore di Fisica nella Università di Torino, che si occupò per il primo dello studio dei fenomeni chimici prodotti dall'elettricità e dimostrò anche che calcinando i metalli in vasi chiusi l'insieme del peso non cambia, mentre le calci ottenute pesano più dei metalli. Ma di queste importantissime esperienze non trasse le fondamentali conseguenze. È innegabile che fu il Lavoisier che dalle esperienze proprie e dal materiale accumulato colle esperienze di altri (cita infatti gli studi del Beccaria), seppe ricavare conclusioni capitali e di indole generale, deducendone un sistema in armonia con i fatti già noti e con quelli che in seguito furono scoperti.

Tra i chimici stranieri illustri del suo tempo, pare che il Volta prediligesse il Priestley per la grande frequenza con cui lo cita nelle sue lettere a Van Marum, all'abate Spallanzani, al Padre Barletti, al cav. Don Marsillo Landriani, al Padre C. G. Campi, al signor Giuseppe Klinkosch, ecc.. La ragione di questa frequenza si ha non solo nel personale valore, quale chimico, dello scienziato, ma per essere il Priestley espertissimo di questioni elettriche ed autore di una « Storia dell'Elettricità ».

Al Priestley il Volta, in una lettera del 10 giugno 1775, descrive con abbondanza di particolari l'elettroforo perpetuo da lui ideato, ed in una lettera del 2 settembre 1777 gli descrive il suo eudiometro, già dallo stesso Volta per il primo

Digitized by Google

applicato alla determinazione della quantità di ossigeno contenuto nell'aria. A questo scopo il Volta introduceva due volumi di aria infiammabile (idrogeno) e tre volumi di aria nel suo eudiometro ben graduato. La diminuzione di volume osservata nel tubo, dopo l'esplosione ed il raffreddamento, divisa per tre, dava la quantità di ossigeno consumato.

Notevolissima l'amicizia e la corrispondenza scientifica del Volta con Luigi Brugnatelli, Suo collega all'Università di Pavia, cui sono rivolte molte delle lettere più importanti; e negli Annali di Chimica e Storia Naturale diretti a Pavia dal Brugnatelli, è pubblicato il maggior numero delle monografie del Volta, compresa la memoria sulla Pila e la descrizione completa del suo eudiometro.

Anche con Lavoisier, il fondatore della Chimica moderna, il Volta fu in particolare domestichezza, tanto da lavorare a Parigi insieme con Lavoisier e con Laplace (1749-1827). È però cosa strana che Lavoisier e Laplace dicano in una loro memoria semplicemente che Volta assisteva alle loro esperienze e fu loro utile, mentre Volta nelle lettera scritta a Van Marum il 28 novembre 1782 toglie ogni dubbio sopra la capitale importanza e la parte diretta che egli ebbe in queste esperienze. Egli scrive:

« Siete voi informato che io e Lavoisier riuscimmo ad ottenere distinti segni di elettricità e perfino le scintille per mezzo dell'evaporazione dell'acqua, o per mezzo dell'effervescenza che producono le diverse specie di aria? Io avevo detto in una mia memoria che è stata letta alla Società Reale di Londra, il 14 marzo 1782, prima di Pasqua, sopra il mio apparecchio condensatore dell'elettricità, che con l'aiuto di questo io speravo di scoprire l'elettricità dell'evaporazione, ecc., troppo debole per potere essere scoperta senza tale aiuto. Qualche tempo dopo, parlando di ciò con il Signor Lavoisier e con altri, noi convenimmo di tentare insieme questa esperienza, che con il più grande successo abbiamo eseguita verso la metà del mese di aprile ».

Arago (1786-1853) nel suo elogio di Alessandro Volta (1), si dimostra assai incerto a chi attribuire il merito di questa

(1) Note del Bosscha alla lettera prima del Volta a Van Marum, in data 28 novembre 1782.

Digitized by Google

esperienza fatta in comune da Volta, Lavoisier e Laplace a Parigi. Ma il Volta in una sua memoria asserisce di avere concepito sin dal 1778 l'idea di questa esperienza eseguita poi a Parigi insieme con i due scienziati sopracitati, e difatti nella lettera a Van Marum segue la descrizione del modo migliore per condurre a compimento l'esperienza.

Ciò è ancora largamente espresso nell'aggiunta alla prima delle sue memorie in cui Volta parla del suo condensatore, ripetendo che varie ragioni ed un lungo viaggio gli avevano impedito prima del felice incontro con Lavoisier e Laplace a Parigi, di tentare le esperienze che già aveva annunciate. E descrive le esperienze eseguite, pur accordando a Lavoisier ed a Laplace il maggior merito possibile. Ne è qui fuor di luogo considerare che Volta a Parigi, in seno all'Accademia delle Scienze, aveva mostrato il suo condensatore e letta la memoria nella quale Egli esprime la speranza di potere con questo nuovo strumento scoprire lo svolgimento di elettricità che doveva accompagnare l'evaporazione dell'acqua.

E se ciò non bastasse, ecco integralmente la chiusa della lettera a Van Marum:

« La memoria che è stata letta alla Società Reale di Londra (il 14 marzo 1782) comparirà solo nel giornale di Rozier aumentata di una appendice sopra queste nuove esperienze; e sarà seguita da un'altra memoria del celebre De Luc sopra la teoria generale dell'elettricità secondo le mie idee ».

La memoria del De Luc, come risulta dalla Edizione Nazionale delle opere di Volta, non fu mai pubblicata, mentre in detti atti esiste la lettera rivolta al Lorgna in data 15 marzo 1783 che conferma che la memoria letta nel 1782 a Londra non fu quella pubblicata in detto anno, ma quella pubblicata in seguito nel Giornale di Rozier. E per maggior esattezza si riporta quanto scrive il Volta al Lorgna in data 15 marzo 1783:

« Non so se Ella sappia che la memoria che avevo destinata per il primo volume della Società Italiana.... la lasciai a Parigi in mano del signor Lavoisier che voleva tradurla per il Giornale di Rozier nel quale, che io sappia, non è ancora comparsa, perchè i signori francesi non si fanno molta

Digitized by Google

premura delle cose degli altri (1). Eppure col signor Lavoisier avevamo fatte molte esperienze insieme, e con l'aiuto singolarmente del mio condensatore per l'elettricità, eravamo giunti ad ottenere segni sensibilissimi di elettricità dalla semplice evaporazione dell'acqua e da molte effervescenze, da quella in ispecie che produce l'aria infiammabile. L'idea di queste esperienze era da me suggerita nella detta memoria.... La riuscita delle esperienze sull'evaporazione la quale sparge un gran lume sull'elettricità naturale atmosferica, ha fatto che io aggiungessi una appendice a quella memoria. Intanto *essa senza l'appendice era stata letta alla Società Reale di Londra....* ».

Anche nel Suo piano didattico di lezioni sull'elettricità e sul magnetismo, Volta conferma come si produca elettricità anche dalla semplice evaporazione dell'acqua e dice:

« Secondo la scoperta da me fatta molti anni or sono (2) ».

E ciò pare che in modo sufficiente illumini la massima parte che ebbe il Volta nelle esperienze eseguite assieme al chimico Lavoisier ed al Laplace; esperienze che, come dice Arago, sono di una importanza capitale.

È inutile ormai discutere oltre sulla priorità dell'idea che è senza dubbio del Volta, ma piuttosto fermare la nostra riverente attenzione sopra l'opera fraterna e comune di tre Grandi: poichè mai lavoro scientifico accomunò nelle ricerche tre Geni quali furono Volta, Lavoisier e Laplace.

Con Gay-Lussac (1778-1850) il Volta non ebbe comunanza di lavoro ma bensì di idee. Anche in questo caso l'iniziativa è del Volta ed anteriore di almeno dieci anni. È fuori dubbio che la legge limite enunciata dal Gay-Lussac sul coefficiente di dilatazione dell'aria e dei vari gas, fu divinata per il primo dal Volta nel 1792. Il Volta non si limitò a questa fondamentale esperienza, ma studiò ancora l'influenza considerevole che la presenza del vapor d'acqua esercita sopra la determinazione del coefficiente di dilatazione dell'aria. Questo

---

(1) Pietro Croci nel suo scritto « Volta e gli scienziati francesi » (vedi *Voltiana* 1926, fasc. 6) ritiene probabile qualche gelosia dei francesi verso Volta. È certo che il Volta fu eletto membro dell'Accademia Francese solo il 5 settembre 1803, dopo esserne stato escluso diverse volte in votazioni precedenti.

(2) Opere di Volta, Edizione Nazionale. Vol. 4, pag. 470.

Digitized by Google

lavoro fu pubblicato nel 1792 negli Annali di Chimica a Pavia (tomo IV, pag. 227), e può darsi che nè il Gay-Lussac nè il Dalton ne siano venuti a conoscenza. La memoria ha per titolo:

« Memoria sulla uniforme dilatazione dell'aria per ogni grado di calore, cominciando sotto la temperatura del ghiaccio, fin sopra quella dell'ebollizione dell'acqua; e di ciò che sovente fa parere non equabile tale dilatazione, entrando ad accrescere a dismisura il volume dell'aria ».

Ma fin dal 28 marzo 1792 la scoperta del Volta fu enunciata in una lettera a Van Marum occasionata da un articolo sull'aria di un altro chimico illustre: Guyton de Morveau (il principale ideatore della nomenclatura chimica) che riteneva, con altri scienziati, che la dilatazione dell'aria non fosse uniforme ma aumentasse in una proporzione crescente. Nella lettera a Van Marum il Volta dice di avere fatte delle esperienze per determinare come l'aria si dilati per ciascun grado di calore. Volta annuncia di avere controllato come l'aria si dilati da 0° fino a 46° R., di un 1/220 per ogni grado Réaumur, e sempre in modo uniforme: « Ma se l'aria è in contatto con l'acqua, la sua dilatazione è in apparenza maggiore, man mano che il calore mette l'acqua in condizione di fornire maggior quantità di vapore, e l'aria di tenerli in soluzione ».

Che i vapori di acqua si sciogliessero nell'aria era allora ritenuto da tutti i fisici ed anche dal Volta. Ma il Volta corresse per il primo questa generale credenza, nel 1795, dapprima in una lettera scritta all'abate Vassalli e poi in una Memoria pubblicata nel 1796 negli *Annali di Chimica e Storia Naturale*. Egli scrive:

« La quantità di vapore è la stessa in un medesimo spazio, sia vuoto di aria, sia occupato dall'aria di qualunque densità; questa quantità dipende solo dal grado di calore, onde ne segue che cade la teoria della dissoluzione dei vapori nell'aria ».

Per dimostrare poi il valore delle osservazioni sperimentali del Volta, basterà ripetere col Bosscha [1]:

« Questo valore di 1/220 di grado Réaumur equivale ad $1/275 = 0{,}003637$ per grado centigrado e rappresenta la dila-

---

[1] Vedi nota 4 alla lettera di Volta a Van Marum, in data 28 marzo 1792.

Digitized by Google

tazione apparente dell'aria in un recipiente di vetro. Aggiungendo 0,000025 per la dilatazione del vetro, si ha il valore di 0,003662 quasi identico al valore di 0,003671 determinato poi dalle esperienze esattissime di Regnault ».

Dieci anni dopo Volta, il Gay-Lussac trovò il valore 0,003750 e Dalton diede il valore 0,00398.

Questi valori sono meno precisi di quelli dati dal Volta e da ciò più forte motivo per associare questa legge al nome di Volta.

Di questa priorità del Volta sopra Gay-Lussac riguardo alla legge sulla dilatazione dei gas a pressione costante, si parla da un pezzo ed in trattati italiani ed in Congressi ed in discorsi, compreso quello dell'illustre Righi nel Congresso del 1889 a Como, ricorrendo il centesimo anno della scoperta della Pila. Rivendichi definitivamente il Congresso del 1927 i diritti del Volta e se ne facciano iniziatori i fisici italiani.

Sulla priorità del Volta nella Legge di Gay-Lussac si occuparono in « Voltiana » il prof. Mario Sala del R. Liceo Beccaria di Milano ed il prof. Antonio Quadrio del R. Liceo Parini di Milano (1). Visto il notevole numero di libri italiani e stranieri enumerati da detti professori per dimostrare in generale la dimenticanza della priorità del Volta da parte degli Autori stranieri, abbiamo creduto inutile ripetere quanto da loro fu scritto, richiamandoci invece ai dati numerici dati dal Volta stesso ed alla loro valutazione precisa da parte di un illustre ed imparziale straniero, il Bosscha, nella nota citata ed integralmente tradotta. Nessun argomento è più valido del valore in cifre dei dati sperimentali.

A tutti è noto che il Console Bonaparte rivolse la maggior attenzione alle esperienze del Volta e, più tardi, anche a quelle di Van Marum. Siccome della Commissione dei Membri dell'Accademia di Francia che deliberò le onoranze a Volta, fecero parte anche Chimici, è bene riportare ciò che ricordò il fisico Mascart (1837-1908) nella Commemorazione Voltiana del 19 settembre 1889 in Como, al 1° Congresso Nazionale degli Elettricisti:

« L'11 vendemmiale anno X (3 ottobre 1801) il Presidente della Prima Classe dell'Istituto di Francia, scienze Matema-

(1) *Voltiana*, Tip. Bari, Como, 1926, fascicoli 7-8 e 11.

Digitized by Google

tiche e Fisiche, propone di dare nuova attività alla Commissione incaricata di occuparsi di esperienze galvaniche, approfittando del soggiorno in Francia dei cittadini Volta e Brugnatelli: questi vengono invitati a voler aggiungersi alla Commissione composta dei cittadini Laplace, Coulomb, Monge, Charles, Vauquelin, Hallé, e Biot relatore. Il 16 brumaio anno X (7 novembre 1801) (1), il 21 brumaio anno X (12 novembre 1801), il 1° frimaio anno X (22 novembre 1801), presente il Console Bonaparte, il Volta fece lettura della Sua Memoria sul galvanismo, ripetendo le principali sue esperienze. L'11 frimaio anno X (2 dicembre 1801) il relatore Biot espone la sua relazione sulle esperienze galvaniche, e viene decretata dalla Commissione al cittadino Volta Alessandro la medaglia d'oro proposta dal Console Bonaparte, che il 13 frimaio anno X (4 dicembre 1801) decreta a Volta un assegno di franchi 6.000 ».

Ed altro ancora si potrà scrivere di Volta in merito ai suoi studi che riflettono i bisogni della Chimica del suo tempo. Ma crediamo di avere raggiunto lo scopo dimostrando i suoi rapporti di operosità coi più grandi chimici contemporanei: Lavoisier, Cavendisch, Priestley, Vauquelin, Nicholson, Berthollet, Brugnatelli, ecc., relazioni tutte basate non sopra infeconde amicizie sentimentali, ma sopra necessità di collaborazione scientifica.

Il Volta, pressato da molteplici idee che vertevano intorno ai più svariati argomenti di Chimica, Fisica e sopratutto di Elettricità, diffondeva il suo sapere con la generosità di chi svela quanto sa, quanto ha fatto, o si propone di fare, con lettere ad amici ed a scienziati senza ombra di egoismi, senza paura di rivalità, ma per amor di scienza, così, da obbligarlo talora a scrivere agli amici stessi, come al Barletti in data 18 aprile 1777:

« Questa mia lunghissima lettera passa per le mani del Padre Campi, a cui Vi prego di rimandarla, che egli me la farà avere, *non avendoci copia,* di quello che ho scritto e potendone aver bisogno ».

---

(1) Il MASCART, nel Congresso degli Elettricisti a Como del 1899, ragguagliò il 16 brumaio anno X al 28 ottobre 1801, ma il CROCI nel suo articolo « Volta e gli scienziati francesi » (citato) corregge in 7 novembre 1801.

Digitized by Google

Ecco lo scienziato, ecco il Grande, ecco l'uomo buono che gode delle proprie scoperte assai più per il bene della Scienza e degli altri che per le sete di ben giusta gloria! Volta fu incomparabile fisico, ma se non avesse legato il Suo nome immortale alle legge sulla dilatazione dei gas a pressione costante, alla pistola di Volta, all'eudiometro, all'elettroforo, allo svolgersi dell'elettricità per l'evaporazione dell'acqua ed all'origine dell'elettricità atmosferica, alla pila, ecc., avrebbe legato il suo nome alle più importanti scoperte chimiche sull'aria, sull'acqua, sul metano, sui gas in genere, ecc., cose tutte da Lui studiate ed in parte intraviste ma non condotte e termine perchè distratto da altre ricerche. E fu vera fortuna che la Chimica in quell'epoca abbia potuto trovare un Cavendisch, un Priestley, un Scheele, un Gay-Lussac, un Guyton de Morveau, un Nicholson e sovratutto un Lavoisier, immortale, troppo presto rapito dalla mannaia della Rivoluzione Francese; l'elettricità chissà per quanto tempo ancora avrebbe atteso il suo Volta! E queste parole non sono vane espressioni, avendo già dimostrata l'importanza degli studi del Volta sopra la Chimica Pneumatica, sul gas delle paludi, sopra la sintesi dell'acqua, dal Volta realizzata senza avvedersene per avere operato con un eudiometro ad acqua, pur ripromettendosi di operare con altro a mercurio.

A riguardo dell'importanza dell'opera Voltiana anche per lo studio dell'analisi dell'aria, riportiamo poche righe di un « Compendio Elementare di Chimica » pubblicato dal chimico francese I. L. Lassaigne nel 1834:

« Tra i mezzi eudiometrici proposti per analizzare l'aria, il più esatto ed il più facile è certamente quello che venne per il primo usato dal Volta, e che giusta l'esame fattone dai signori Humboldt e Gay-Lussac, unisce ad una grande semplicità una grande precisione [1] ».

---

[1] Il prof. Icilio Guareschi, che insegnò Chimica Farmaceutica nella R. Università di Torino, in un suo pregevole scritto pubblicato nella *Nuova Enciclopedia di Chimica* (vol. 9, pag. 3), enumera altri lavori del Volta riguardanti la Chimica e che qui vengono trascritti: *a*) « Sopra la costruzione di un moschetto e di una pistola ad aria infiammabile ». Tre lettere rivolte al sig. marchese Francesco Castelli (*Scelta di opuscoli interessanti.* Milano, 1877, tomo XXX e XXXI); *b*) « Sunto di una lettera al

Digitized by Google

E anche Cavendisch, nel 1783, fece la sua accurata ed esatta determinazione dell'ossigeno dell'aria col metodo suggerito da Volta.

Volta minuzioso ed esatto nel comunicare agli altri il risultato delle proprie esperienze, era anche cortese nel dare i più larghi consigli sopra nuovo esperienze da tentare. Così nelle lettere a Van Marum dell'8 marzo e del 26 giugno 1786, il Volta propone a Van Marum una lunga serie di esperienze da tentare colla sua potente macchina elettrica. In detta macchina il piatto di cera di Spagna si strofinava pescando nel mercurio. Anche il Padre Beccaria a Torino usava macchina presso a poco consimile (1). Van Marum risponde e dà conto dei risultati ottenuti nelle lettere del 15 aprile e del 31 agosto 1788 e del 21 maggio 1789, chiamando Volta: « princeps electricorum ».

Egli dice: « Io Vi ho scritto con dettaglio riguardo le esperienze che ho fatto secondo le idee che *voi mi avete suggerito,* e Vi prego di comunicarmi le vostre riflessioni riguardo a queste esperienze e di aggiungere le vostre idee riguardo nuove esperienze da fare con la forza straordinaria della nostra macchina ».

---

sig. Venini relativa alla Memoria del chimico Porati sulla possibilità di una accensione spontanea » (in 8, Milano, 1810); *c*) « Osservazioni sul fosforo delle orine » (opuscoli, edizione in 4, t. I, 1778); *d*) « Memoria sopra i fuochi dei terreni e delle fontane ardenti in generale, e sopra quelli di Pietra-Mala in particolare » (Ivi, t. 7, 1784 e « Memorie Società Italiana », t. 2, 1784 e Opere, tomo III). Appendice a detta Memoria, ove parlasi particolarmente dei fuochi di Velleja (*Opere,* tomo III, pag. 291); *e*) « Lettera al dott. Attilio Zuccagni responsiva ad altra di esso sopra un ignivomo » (« Giornale Pisano », tomo VI, e *Opere,* tomo III, pag. 323); *f*) « Lettera al prof. Brugnatelli, sopra alcuni fenomeni chimici ottenuti col nuovo apparecchio elettrico » (« Annali di Chimica del Brugnatelli », 1800, tomo XVIII). E un'altra noterella: « Sopra alcuni fenomeni chimici » (articolo di lettera al prof. Brugnatelli. Opere, tomo III, pag. 277); *g*) « Alcune riflessioni sul magnetismo e sulle proprietà della polvere di carbone, scoperta da Lowitz, di togliere sull'istante alla carne la più fracida l'odore putrido, ecc. » (in Brugnatelli, biblioteca fisica, tomo IV, 1788); *h*) « Estratto di un suo manoscritto sull'insussistenza della genesi del cloruro e dell'alcali nell'acqua sottoposta all'azione degli elettromotori » (*Opere,* tomo III pag. 287).

(1) « Saggio tecnico e sperimentale di elettricità ». *Opere di Volta.* Edizione Nazionale. Vol. 4, pag. 340 e 343).

Digitized by Google

E ancora: « Delle esperienze *che mi avete proposto,* restano solo quello che riguardano l'economia animale ».

Dopo la scoperta della Pila, Volta consiglia esperienze non solo con la Pila, ma anche esperienze di confronto con la grande macchina elettrica di Van Marum (1), e sino dal 29 agosto 1801, Volta scrive con la più assoluta sicurezza che solo il genio può dare:

« Io eseguirò a Parigi ed a Ginevra della esperienze che in modo decisivo troncheranno ogni questione sopra la identità o la pretesa differenza del fluido elettrico o galvanico. Dite voi stesso che non ci vedete chiaro, e la vostra Società ha proposto per il premio di quest'anno tale questione. Io potrei ben inviare uno scritto per risolverla, ma credo che tale soluzione verrà prima per mezzo della pubblicità delle mie

---

(1) Anche la macchina elettrica di Van Marum, che Volta nella sua lettera dell'8 ottobre 1796 chiama « la più grande ed attiva della macchine elettriche, e la cui forza è veramente prodigiosa », fu oggetto dell'attenzione di Napoleone I Imperatore, la cui visita, come scrisse Bosscha nella preziose sue note alla lettere di Volta a Van Marum, fu descritta dallo stesso Van Marum.

La visita di Napoleone I al Museo di Teyler avvenne il 13 ottobre 1811; l'Imperatore era di malumore e forse anche non ben prevenuto verso Van Marum, che avvertito solo un'ora prima non aveva avuto il tempo di caricare la grande batteria elettrica per fare delle esperienze. Lo stato umido dell'aria impedì il funzionamento della grande macchina elettrica, e Van Marum dovette limitarsi a far funzionare una macchina elettrica di nuovo modello che si trovava in una piccola stanza ben secca del primo piano. Avendo la macchina funzionato assai bene, l'Imperatore si mostrò assai soddisfatto e prima di partire disse al Van Marum con benevolenza: « Io vi farò dare una pensione ». E siccome Van Marum, dato il cattivo umore dell'Imperatore ed i discorsi precedenti, temette di venir messo in pensione, chiese all'Imperatore di poter restare presso il Museo di Teyler per continuare le proprie ricerche; quegli rispose « che continuasse pure cercando di essere utile ».

E pochi giorni dopo ebbe la materiale dimostrazione del compiacimento dell'Imperatore. Ma Martino Van Marum, pur essendo così meritevole, si trovò quel giorno in angustie per non poter provare il proprio valore, e dovette servirsi anche di lettere e di opere che attestavano la grande stima verso di lui di uomini celebri, come Nicholson, Berthollet (carissimo all'Imperatore) e mostrò anche la memorabile lettera del 29 novembre 1801 da lui diretta a Volta e pubblicata negli « Annali francesi di Chimica », in cui gli dava ampia relazione sopra le esperienze compiute con la colonna di Volta.

Digitized by Google

esperienze, prima che sia trascorso il tempo per aprire le memorie e decretare il premio.... ».

E Van Marum in una sua lunghissima lettera del 29 novembre 1801 dà a Volta il resoconto di una lunga serie di esperienze eseguite con Pfaff, a lui inviato dallo stesso Volta. Van Marum, completamente guadagnato alle teorie Voltiane, oltre il prezioso contributo delle sue osservazioni, propone che la colonna elettrica, dal nome del suo inventore, prenda il nome di colonna di Volta.

Non è qui il caso di parlare delle infinite applicazioni della Pila di Volta alla Chimica, fatte dai più illustri chimici e fisici del suo tempo: Davy, Hisinger, Berzelius, Gay-Lussac, Thenard e Brugnatelli, ecc.. Ma certo di somma contentezza fu per Volta la decomposizione dell'acqua in idrogeno ed ossigeno compiuta da Nicholson e Carlisle il 30 aprile 1800 e ripetuta poi dallo stesso Volta ed ancora a Parigi ed a Vienna.

Il Volta aveva preveduto gli effetti chimici della Pila, che descrisse subito nella lettera del 20 marzo 1800 a Sir Banks, pregandolo di farla conoscere al Cavallo, al Bennet, ed al Nicholson. Memorabile ancora è la lettera del Volta dell'autunno 1800, al Brugnatelli, in cui Egli riferisce sì lo scritto a Lui rivolto il 17 agosto 1800 dal Consigliere Marsilio Landriani sopra l'esperienza del Nicholson ripetuta a Vienna dal prof. Iacquin, come la risposta data dal Volta al Landriani da Como, in data 22 settembre 1800. In questa lettera il Volta scrive:

« Vi dirò ancora, che codesto fenomeno della decomposizione dell'acqua, per mezzo della corrente elettrica mossa e mantenuta perpetuamente in giro per mezzo del mio apparato, non mi riuscì del tutto nuovo. Le mie proprie esperienze mi avevano già presentato qualche cosa di analogo, per non dire lo stesso risultato, e già non ero io molto lontano da tale scoperta di Nicholson, od almeno avrei potuto esservi facilmente condotto ».

Difatti il Volta aveva già osservato per proprie esperienze e per quelle del Brugnatelli, specialmente nella Pila a corone di tazze dove adoperava soluzioni di soda, di allume, e di sale comune, la decomposizione di queste ultime sostanze.

Il Volta che, come già si scrisse, aveva per primo delineato il cammino che portò alla sintesi dell'acqua, diede ancora

Digitized by Google

l'apparato che doveva condurre il Nicholson all'analisi dell'acqua ed alle infinite scoperte sugli effetti fisici e chimici della Pila, per opera di altri scienziati.

La Pila di Volta, scrisse Arago, « è, quanto alla singolarità degli effetti, il più meraviglioso degli strumenti che gli uomini abbiano giammai inventato, senza eccettuarne il telescopio e la macchina a vapore ».

R. Istituto Tecnico di Como.

ARRIGO FERRATINI

Digitized by Google

Recensioni e Note bibliografiche

AMEDEO AGOSTINI ed ENEA BORTOLOTTI: *Esercizi di Geometria analitica.* Zanichelli, Bologna.

Questa raccolta di esercizi è divisa in due parti comprendenti complessivamente 3 volumi con un totale di 741 pagine. Il quale numero indica di per sè uno dei caratteri più notevoli della pubblicazione: l'ampiezza.

Il libro è rivolto agli studenti sia delle Università che dei Politecnici, ed è sostanzialmente collegato alle « Lezioni di Geometria analitica » di Ettore Bortolotti.

Contiene esercizi relativi alla classica materia dei corsi di Geometria analitica, più applicazioni relative agli elementi della geometria differenziale, trattando di curve piane e gobbe, e di superficie. In fine una Appendice contiene complementi relativi: alla proiettività per forme sia di prima che di seconda e terza specie, alle coniche e quadriche, ai problemi geometrici elementari, algebrici di grado superiore al secondo e trascendenti, alla inversione nel piano e nello spazio; alla geometria dello spazio rigato; al metodo vettoriale.

Di ogni problema proposto è indicata la risposta, accompagnata, quando è parso opportuno, da un cenno di avviamento alla risoluzione e le questioni più difficili sono contradistinte dalle altre; per modo che lo studente trova nel libro argomenti di esercizi con una guida che li rende effettivamente utili.

Il materiale degli esercizi è in parte il materiale ormai classico discusso nelle raccolte congeneri, ma in parte è frutto del lavoro originale degli Autori, i quali, pur muovendosi nel campo della Geometria analitica, non hanno dimenticato i procedimenti e le considerazioni sintetiche.

La materia è presentata con ordine, le difficoltà opportunamente graduate, i complementi effettivamente interessanti; l'indice del libro assai diffuso, e l'indice analitico delle curve e delle superficie notevoli rendono l'opera maneggevole nonostante l'ampiezza.

Digitized by Google

Il libro appare così particolarmente adatto a coloro che vogliono approfondire concetti e procedimenti della Geometria analitica; e anche lo studente che desidera acquistare solo quel *minimum* di pratica che gli assicuri il risultato dell'esame può trarne vantaggio quando sappia scegliere, o farsi scegliere, un limitato numero di esercizi fra i moltissimi che la raccolta gli offre.

O. C.

R. BRICARD: *Leçons de Cinématique.* Tome II. *Cinématique appliquée.* Parigi, Gauthier-Villars, pag. VI + 352.

Abbiamo già indicato sommariamente il contenuto del primo volume di quest'opera. (Cfr. *Periodico*, 1926, pag. 196). Questo secondo volume è dedicato ai *meccanismi* che l'A. studia da un punto di vista piuttosto elevato e limitandosi a quelli che presentano qualche difficoltà teorica. Così si cercherebbe inutilmente un cenno sulle puleggie, mentre sono studiati con ampiezza gli ingranaggi, le camme e i sistemi articolati. Un capitolo è dedicato allo studio dell'*attrito*, un altro agli integrafi.

Interessanti alcune *note* alla fine del volume che riassumono i più recenti risultati sui *sistemi articolati* e pongono in luce notevoli problemi ancora insoluti.

G. S.

Digitized by Google

Questioni

Questioni proposte. (1)

140. Nella questione 140, proposta nel fascicolo precedente, è incorso un errore di stampa figurandovi sen n^2x anzichè sen $2^n x$. Pertanto la questione stessa va enunciata come segue.

Sia data una successione qualunque dei segni + e —. Dimostrare che si può determinare e in un modo unico, un numero x (compreso fra 0 e 2π) tale che

$$\text{sen } 2^n x$$

abbia il segno dell'ennesimo termine della successione predetta.

TR.

144. Nella decomposizione in parti uguali di due poligoni equivalenti del piano si distingua fra parti direttamente e inversamente uguali: si domanda se in ordine a tale distinzione vi è luogo a considerare diverse specie di equivalenza.

F. E.

145. Costruire un rettangolo di area data, i cui lati stiano in un rapporto dato. Costruire un rettangolo dati il rapporto dei lati e la differenza dei loro quadrati. Illustrare i due problemi e le loro relazioni con la geometria analitica.

F. E.

---

(1) Si pregano i solutori di premettere alle risposte il testo della questione proposta, e di redigere ciascuna risposta su un foglietto separato.

Digitized by Google

146. Determinare le curve per le quali la distanza di un punto fisso da una tangente è proporzionale alla potenza n^{esima} della distanza del punto stesso dal punto di contatto, essendo n pari e positivo. Considerare in particolare il caso $n = 2$.

G. VIVANTI

147. Si definisca, come d'abitudine, il fuoco di una conica K quale punto, del piano della conica stessa, in cui l'involuzione delle rette coniugate è l'involuzione circolare. Riconoscere che le distanze di un punto P della conica dal fuoco e dalla relativa direttrice sono in un rapporto costante, e ciò mediante considerazioni sulle *rette isotrope* uscenti dal fuoco, analoghe a quelle svolte nell'articolo: *L'immaginario in Geometria* pubblicato da F. ENRIQUES in questo fascicolo del Periodico.

O. C.

Risposte.

Si pregano i solutori di inviare nuovamente le risposte alle Questioni proposte *del fascicolo precedente, essendo andato smarrito il plico relativo.*

Digitized by Google

Atti della Società Italiana di Scienze fisiche e matematiche « Mathesis »

VERBALI DELLE SEZIONI

SEZIONE FIORENTINA

Adunanza del 3 febbraio 1927.

Il giorno 3 febbraio 1927, i soci della Sezione si sono riuniti in un'aula della R. Università. Erano presenti: il sen. A. Garbasso, presidente della Sezione, i proff. Alvise, Abetti, Ciani, Rolla, Persico, Sansone, D'Incà-Levis, Conti, Patrassi, Gazzini, Fortini, Maroni ed altri.

Il prof. Conti, interpretando il pensiero di tutti i convenuti, si compiace per la nomina del prof. Garbasso a Podestà di Firenze, e per la recente nomina dei proff. Persico e Sansone a docenti della Università fiorentina. Risponde per tutti, ringraziando, il prof. Garbasso.

Ha poi la parola il prof. Persico, il quale intrattiene per circa un'ora l'uditorio esponendo con grande chiarezza i principi della nuova Meccanica ondulatoria, e destando molto interesse. Segue un breve scambio d'idee sull'argomento della conferenza, al quale prendono parte i proff. Rolla, Garbasso, Persico e Sansone.

Infine si stabilisce che alla prossima adunanza terrà una conferenza il prof. Sansone.

Quindi si toglie la seduta.

Il Segretario
A. Maroni

SEZIONE MILANESE

Adunanza del 10 febbraio 1927.

La Sezione si è riunita alle ore 17 in un'aula della R. Scuola di Ingegneria. Presiede il prof. Vivanti. Sono presenti i soci: proff. Ambrosoli, Angelini, Baffi, Biggiogero, Canevari-Crespi,

Digitized by Google

Cassina, Chisini, Cisotti, Di Dia, Finzi, Hidalgo, Lauro, Maggi, Moretti, Morra, Pastori, Pedote, Praolini, Spera. Giustifica l'assenza il prof. Piazza.

Il prof. Cassina richiama l'attenzione dei Colleghi sul giornale rivolto a gli studenti delle Scuole medie: « Rivista di Matematica pura ed applicata » (Capozzi-Palermo).

Il prof. Chisini parla dei principi fondamentali della teoria degli isoperimetri nel piano.

Rileva le inesattezze delle antiche dimostrazioni per assurdo. Accenna alla dimostrazione di Steiner, in virtù della quale è giustificato che, tra le curve chiuse di dato perimetro, racchiude area massima la circonferenza. Parla delle ricerche di Caratheodory atte a provare l'esistenza del massimo precedente. Deduce quindi che, tra i poligoni d'ugual perimetro e d'ugual numero di lati, ha area massima il regolare. L'oratore accenna in fine alle ricerche del Minkowski su gli argomenti esposti.

La conferenza è vivamente applaudita, e il prof. Vivanti ringrazia l'oratore.

La seduta ha termine alle ore 18,15.

Il Segretario — *Il Presidente*
B. FINZI — G. VIVANTI

Adunanza del 10 marzo 1927.

La Sezione si è riunita alle ore 17 in un'aula del R. Politecnico. Presiede il prof. Vivanti. Sono presenti i soci: professori Ambrosoli, Angelini, Biggiogero, Crespi-Canevari, Cassina, Chisini, Cisotti, Di Dia, Ferrario, Finzi, Lauro, Maggi, Martinotti, Morra, Pedote, Pellini, Pontremoli, Praolini, Spera.

Il prof. Vivanti dà notizia della costituzione del Seminario matematico e fisico di Milano, invitando i Soci a volersi inscrivere.

Il prof. Lauro parla della teoria dell'emissione e dell'ondulazione, nelle sue varie fasi, attraverso il pensiero di Newton, di Huygens, di Maxvell, Thomson, Einstein.

Interloquiscono i proff. Maggi e Pontremoli.

Il prof. Vivanti ringrazia l'oratore, che è vivamente applaudito.

La seduta ha termine alle ore 18,15.

Il Segretario — *Il Presidente*
B. FINZI — G. VIVANTI

SEZIONE TRIESTINA

Adunanza del 12 febbraio 1927.

In un'aula della R. Università si è riunita sabato 12 febbraio 1927 la Sezione, presenti i soci: Antonaz, Carnera, Furlani,

Digitized by Google

Ghersa, Menz, Nordio, Paolina, Sandri, Sibirani, Stecher, Stenta, Tedeschi, Venturini, Vercelli, Voghera; numerosi invitati e studenti.

Il Presidente rivolge un saluto ed un ringraziamento al professor Enriques che ha cortesemente accettato il suo invito di parlare alla Sezione triestina. Il prof. Enriques, ricambiato il saluto al Presidente, si dice lieto di trovarsi nuovamente insieme con i consoci di Trieste che conobbe nell'occasione del Congresso di « Mathesis » tenutosi nel 1919 in questa città. Egli ha poi intrattenuto la Sezione su « La definizione, come problema scientifico » (1).

Il dotto e brillante conferenziere, ascoltato con il massimo interesse da tutto l'uditorio, fu alla fine vivamente applaudito.

Il Segretario — TEDESCHI

Il Presidente — F. SIBIRANI

SEZIONE TORINESE

Adunanza del 22 febbraio 1927.

La Sezione Torinese della « Mathesis » si è riunita il 22 febbraio 1927, ore 17, in un'aula della R. Università; erano presenti quasi tutti i professori della Facoltà di matematica, nonchè numerosi soci della « Mathesis ».

Il prof. C. Somigliana ha intrattenuto i convenuti parlando sulla *Determinazione delle costanti terrestri con misure di gravità.*

Il Segretario — MARIO BOSSOLASCO

Il Presidente — GINO FANO

SEZIONE GENOVESE

Adunanza del 27 febbraio 1927.

La Sezione si aduna alle ore 17 in un'aula del R. Istituto Tecnico, gentilmente concessa, per trattare il seguente ordine del giorno:

a) BERNINI ARCIERO: « Rumori degli aerei »;
b) LORIA GINO: « Due centenari »;
c) Rendiconto finanziario.

Sono presenti i soci: Loria, presidente; Bedarida, Beggi, Bernini Arciero, Bontadi, Burnengo, Casazza, Ceruti, Civinini, Clarke, Concina, Elia, Garibaldi, Gonnella, Guareschi, Lamberti, Marcel-

(1) La conferenza è riprodotta come articolo nel n. 2 del *Periodico*, 15 marzo 1927.

Digitized by Google

lino, Nacanneli, Novella, Padoa, Pascal, Piersantelli, Rosa, Rossi, Rolla, Sadun, Sbrana, Tacchella, Togliatti, Zaffagni, Zani.

Il Presidente aprendo la seduta pronuncia parole di benvenuto verso i nuovi soci Rolla, Novella, Nacanneli, Bontadi, Zani, Piersantelli, Elia, Cattani, Vigo, Bonistalli, con i quali la Sezione raggiunge il numero ragguardevole di 60 inscritti.

Dà, quindi, la parola al prof. Bernini il quale riassume una sua nota pubblicata negli Atti della Società Ligustica di Scienze e lettere di Genova, intitolata « Fenomeni acustici che si ascoltano quando un'aereo è in volo ». Il prof. Bernini, oltre che esporre sinteticamente le vedute attuali, ed il contributo personale da esso portato, sull'interpretazione dei fenomeni cosidetti: rinforzo aperiodico del rombo, rinforzo periodico e fenomeno Murray, prende occasione dall'argomento per riprodurre a vantaggio dei numerosi soci che, pur non essendo fisici, devono insegnare la fisica nelle scuole medie, alcune semplici ed interessanti esperienze di acustica. La comunicazione, oltre che per l'argomento in sè, interessante per il contributo dato alla didattica della fisica, è stata vivamente applaudita.

Il prof. Loria espone quindi la sua comunicazione: « Due centenari », avvertendo subito che si tratta non di due personaggi, ma di due eminenti opere matematiche, cioè:

GAUSS, « Disquisitiones generales circa superficies curvas »;
MÖBIUS, « Der barycentrische Calcul ».

Entrambe videro la luce nel 1827 e documentano il risveglio delle scienze esatte in Germania, iniziatosi con la fondazione a Berlino di una grande Università (1810) e reso intenso dalla fondazione (1826) del « Giornale di Crelle ».

Il prof. Loria ricorda brevemente le vicende della vita di quei due sommi scienziati e analizza quelle due pubblicazioni, rilevando i punti di più spiccata originalità e che ottennero un posto stabile nella geometria. Sulla seconda cita i giudizi che furono pronunciati da Cauchy e Gauss, segnalando la profondità del secondo.

I presenti ammaliati, come sempre, dalla vivacità dell'esposizione del prof. Loria, coronarono la fine della sua comunicazione con sentiti applausi.

Alla fine il resoconto finanziario, esposto dalla tesoriera signorina Clarke, è stato approvato all'unanimità.

Alle ore 18,30 la seduta è tolta.

Il Segretario
G. GUARESCHI

p. *Il Presidente*
E. C. TOGLIATTI

Digitized by Google

***

Relazione sulla seduta solenne tenuta il 17 marzo 1927 dalla Sezione ligure della Società italiana « Mathesis » in commemorazione del 2° centenario della morte di Isacco Newton.

La Sezione si è adunata alle ore 17 nell'aula magna della R. Università, gentilmente concessa, per ascoltare i seguenti discorsi:

G. LORIA: « I. Newton, nella vita e nelle opere ».

F. SBRANA: « I principii della meccanica newtoniana ».

P. STRANEO: « La fisica newtoniana ».

Oltre i soci di « Mathesis » quasi al completo, erano presenti il Rettore dell'Università prof. Maresco, il preside della facoltà di Scienze prof. Lussana, numerose autorità cittadine, quali il rappresentante del Podestà, il Provveditore agli studi, il rappresentante dell'Istituto idrografico della Marina, il presidente della Società ligustica di Scienze e lettere, molti professori dell'Università e studenti.

Inizia la commemorazione il prof. Loria, il quale espone con la consueta efficacia e vivacità una sintesi della vita e delle opere di Isacco Newton. Quindi il prof. Sbrana lumeggia con chiarezza in qual modo dagli studi astronomici il Newton giunse alla formulazione della legge sulla gravitazione universale. Infine il prof. Straneo esamina acutamente l'opera del Newton come fisico, ne rileva il contenuto e sfata con dottrina ed originalità alcune interpretazioni erronee, oramai leggendarie, dell'ottica newtoniana.

Gli oratori furono meritatamente applauditi e complimentati dal numeroso e scelto uditorio per il modo elegante e sobrio con cui riuscirono ad esporre il pensiero di uno dei più grandi genii dell'umanità.

Il Segretario
G. GUARESCHI

SEZIONE NAPOLETANA

Adunanza del 19 marzo 1927.

In occasione del bicentenario newtoniano, il prof. R. Marcolongo ha tenuto una conferenza su « Newton e la sua opera » alla presenza di moltissimi socii ed invitati.

Il prof. Marcolongo, dopo di aver rievocato l'opera del nostro sommo Galileo, che morì nello stesso anno (1642) in cui in Inghil-

Digitized by Google

terra nasceva Isacco Newton, ha sintetizzato la vita e l'opera scientifica del grande inglese sia come matematico che come fisico ed astronomo, illustrando le varie tappe della sua prodigiosa attività scientifica e le sue opere classiche.

Rivolse maggiormente la sua attenzione alle due massime scoperte di Newton: quella del « Calcolo differenziale » e quella della « Gravitazione universale ». La genesi e lo sviluppo della prima si collega alle gloriose tradizioni italiane da Archimede a Galileo, a Cavalieri e a Torricelli. Il prof. Marcolongo accenna ai principii del calcolo secondo Newton e alla famosa disputa tra Leibniz e Newton per la scoperta dei nuovi calcoli al lume dei nuovi documenti e delle ultime ricerche.

La parte più notevole della conferenza è dedicata ai lavori e alle scoperte di Newton nel campo della *meccanica* e ad una rapida esposizione del contributo fondamentale della « Phylosophia naturalis principia mathematica » (1687); facendo infine rilevare il grande rinnovamento della filosofia naturale prodotto dal genio di Newton.

La conferenza, ricca di copiose citazioni bibliografiche e di aneddoti della vita scientifica del secolo XVIII, ha tenuto desta l'attenzione del numeroso uditorio per circa un'ora e mezza.

Il Presidente
G. SANNIA

Direttore responsabile: AGILULFO RICCI

Bologna 1927 - Cooperativa Tipografica Azzoguidi

Digitized by Google

I principii della Logica Simbolica (1)

La Logica Simbolica o Matematica si considera generalmente come una logica di nuovo genere oppure come una nuova teoria logica; ma non è questo il punto di vista più saliente. Infatti non esistono due logiche formali, una classica e una moderna, una conservatrice e una rivoluzionaria, ma solamente una e cioè la scienza di quello che è presupposto nel pensare, proprio come l'aritmetica è presupposta nel calcolare e la geometria nel disegnare.

Si può chiamare « logica » anche la scienza del processo psicologico del pensiero, cioè la scienza dei fatti che determinano e reggono il pensare, proprio come ad es. le nostre dita e le cifre ci permettono il calcolare oppure la riga e il compasso ci rendono possibile il disegnare. Per questo è possibile distinguere la *logica psicologica* dalla *logica formale*; la prima considera l'atto del pensare, mentre la seconda si occupa di leggi e di connessioni riconosciute a priori e indipendenti dalla circostanza che esistono uomini, cioè entità ragionevoli esercitanti, con più o meno successo, l'arte del pensare. In seguito, intendiamo con « logica » soltanto quest'ultima, la quale come concetto coincide con la logica simbolica.

La differenza essenziale fra la logica classica e quella simbolica non è nè l'oggetto nè i risultati; ma l'uso sistematico del simbolismo. Nessuno contesta che la lingua della vita ordinaria malamente si adatti ai bisogni delle scienze astratte. Certamente la matematica non avrebbe mai potuto

(1) L'autore ringrazia il signor GIOVANNI RICCI (di Roma) del suo gentilissimo aiuto nel far sì che il presente articolo abbia una forma abbastanza italiana per la pubblicazione.

Digitized by Google

avere qualche notevole sviluppo se non si fossero creati simboli convenienti come le cifre, i segni d'operazione, il segno di eguaglianza ecc.; per questo s'intende a priori che un buon simbolismo deve essere un vantaggio enorme anche per la logica; possiamo perfino dire, senza esagerazione, che la vera scienza logica è possibile soltanto dopo l'invenzione di un simbolismo conveniente, proprio come accade evidentemente per la matematica.

Adesso si domanderà: Esiste un simbolismo conveniente per la logica? Rispondo: Non abbiamo solamente un simbolismo, ma una grande varietà di sistemi che si succedono via via sempre più sviluppati, e non è ancora possibile dire se sia già stato raggiunto il sistema vero e perfetto. Dall'inglese GEORGE BOOLE nella metà del secolo passato — trascurando i tentativi di LEIBNIZ, LAMBERT, HAMILTON ecc. — fino all'altro inglese BERTRAND RUSSELL, quasi ognuno, cioè PEIRCE, SCHRÖDER, FREGE, PEANO, ha creato un sistema di simbolismo. Anch'io non ho l'ambizione di costituire un'eccezione riguardo a ciò; ma intendo di usare nelle spiegazioni seguenti un sistema di simbolismo che si fonda su quello dei *Principia Mathematica* di WHITEHEAD e RUSSELL, ma che nondimeno se ne distingue in punti essenziali. Spero che il lettore s'adatterà a questo cambiamento, che ho trovato utile nei miei lavori intorno alla logica simbolica, e che è stato approvato anche da altri.

Essendo difficilissimo dare un'introduzione alla logica simbolica in poche pagine, mi sembra opportuno mettere in evidenza quei fatti che possono essere compresi senza una conoscenza estesa dell'oggetto e che sono particolarmente interessanti per la matematica generale.

1. - Le nozioni fondamentali.

Prima di tutto bisogna occuparci delle *nozioni fondamentali* della logica. Ne dò per ora il primo gruppo: *proposizione, non, o, e, segue* ed *equivalente.*

Con *proposizione* non intendo la frase pronunziata o scritta, tanto meno la proposizione asserita, cioè il giudizio, ma solamente il contenuto di una proposizione possibile, di cui può sempre dirsi che è *vera* o *falsa.*

Digitized by Google

La *disgiunzione* « p o q » è una proposizione vera, se almeno uno dei due termini è una proposizione vera, essendo indifferente che le proposizioni combinate abbiano o no fra loro qualche connessione logica o materiale. Per es. « il sole è caldo o il cielo è verde » è una proposizione vera, mentre « il sole è freddo o il cielo è verde » è una proposizione falsa. (Si badi che usiamo la parola « disgiunzione » come un segno puramente convenzionale e non nel senso ordinario di « separazione »).

La *congiunzione* « p e q » è vera, se ambedue le proposizioni combinate sono vere, altrimenti no.

L'*implicazione* « da p segue q » o « se p, allora q » oppure « p implica q » è definita come « (non p) o q » e, per conseguenza, è vera, se almeno una delle proposizioni « non p » e « q » è vera, vale a dire, se p è falsa o q è vera; ed è falsa soltanto se p è vera e q è falsa. Per es. « se il cielo è verde, il sole è caldo » è una proposizione vera, mentre « se il sole è caldo, il cielo è verde » è una proposizione falsa.

Anche l'implicazione non pressupone nessuna connessione logica o materiale fra le proposizioni combinate. Naturalmente, nel caso che esista una dipendenza logica o causale di q da p, p non può essere vera, senza che q sia vera anch'essa; vale a dire, dalla dipendenza di q da p si deduce l'implicazione « da p segue q », ma non viceversa.

La proposizione che esprime l'*equivalenza* « p è equivalente a q » è vera, se p e q sono vere tutte e due, ovvero, ciò che ha lo stesso effetto, se ciascuna implica l'altra. Per es. la proposizione « (il sole è freddo) è equivalente a (il cielo è verde) » è vera, mentre l'altra « (il sole è caldo) è equivalente a (il cielo è verde) » è falsa.

Quanto al *simbolismo,* usiamo per le proposizioni non analizzate le lettere p, q, r, s. La negazione di p si scrive $-p$, la disgiunzione « p o q » e la congiunzione « p e q » si scrivono rispettivamente $p \cdot q$ e $p.q$. (Analogamente, scriviamo $p \cdot q \cdot r$ e $p.q.r$ per le proposizioni « p o q o r » e « p e q e r ».) Non è necessario, ma è comodo avere segni speciali per l'implicazione e l'equivalenza; useremo i simboli $p \rightarrow q$ e $p \rightleftharpoons q$ per le proposizioni « p implica q » e « p è equivalente a q » (1).

(1) I simboli corrispondenti del sistema di PEANO sono i seguenti: $-p$, $p \circ q$, $p \cdot q$ o pq, $p \supset q$, $p = q$.

Digitized by Google

Il secondo gruppo di nozioni fondamentali comprende: *oggetto, concetto, avere, tutti, esiste* e *identico.*

Consideriamo ad es. le due proposizioni « il sole è caldo » e « la terra gira attorno al sole ». La prima contiene l'oggetto « sole », la qualità « caldo » e una certa relazione esprimente che l'oggetto ha la qualità in questione; nella seconda troviamo gli oggetti « terra » e « sole », la relazione duale « gira attorno a » e una certa relazione triadica (non espressa in parole), la quale indica che la terra ha col sole la relazione in questione.

Per *oggetti* nel senso stretto intendiamo sempre, come in questi esempii, soltanto gli oggetti reali che influiscono sui nostri sensi o di cui abbiamo conoscenza per comunicazione o per la scienza, vale a dire, che ci sono dati indipendentemente dal pensare logico. Dal punto di vista formale è spesso utile trattare come oggetti gli elementi di qualunque insieme consistente (1), vale a dire, che non dà luogo a contraddizioni; ma volendo costruire il sistema della logica è necessario ammettere come oggetti soltanto quelle entità che non presuppongono già il pensare logico. Quindi la nostra intenzione attuale non ci permette di considerare come oggetti ad es. le qualità, le relazioni, le classi, i numeri, le funzioni, ma soltanto quelli che ci sono dati estralogicamente.

Le *qualità* e le *relazioni* verranno indicate col nome comune *concetti.* Come vediamo dagli esempii sopra indicati, una qualità si riferisce ad una entità, mentre una relazione si riferisce a due entità oppure a tre entità ecc.

Lasciando indefinito l'oggetto o gli oggetti, cioè sostituendo qualche segno arbitrario, ricaviamo *forme proposizionali,* ad es. « x è caldo » e « x gira attorno a y ». Queste forme proposizionali non sono nè concetti, nè proposizioni: soltanto dopo aver sostituito qualche oggetto a x e y ne ricaviamo proposizioni, vere o false.

Oltre alle qualità di oggetti e relazioni fra oggetti consideriamo anche *concetti di concetti,* cioè qualità di qualità,

---

(1) È un insieme non consistente ad es. quello di tutti i numeri ordinali di CANTOR, poichè esso dà luogo all'antinomia ben conosciuta di BURALI-FORTI. Darò più tardi altri esempii di tali insiemi.

Digitized by Google

qualità di relazioni, relazioni fra qualità ecc. Ad es. il fatto che una qualità appartiene ad almeno un oggetto è una qualità della qualità stessa. (Ritornerò per esteso su questo punto.)

Per indicare oggetti definiti useremo le lettere *a*, *b*, *c*, *d*, mentre per oggetti *variabili*, cioè per i posti dove si sostituiscono oggetti in una forma proposizionale, impiegheremo, come abbiamo già fatto sopra, le ultime lettere dell'alfabeto latino (1). I concetti definiti si scrivono f, g, h, mentre i concetti variabili, vale a dire, i posti dei concetti che intendiamo lasciare indefiniti, si scrivono φ, χ, ψ. Per mettere in evidenza il carattere logico di un concetto scriviamo f^x per una qualità di oggetti, f^{xy} per una relazione fra due oggetti, ecc. Analogamente F^{φ^x} significa una qualità di qualità di oggetti, $F^{x\varphi^y}$ una relazione fra oggetti e qualità di oggetti, ecc.

Da una qualità f^x, diciamo ad es. « esser caldo », o piuttosto dalla forma proposizionale f_x, « x è caldo », oltre la *proposizione singolare* « a è caldo », si derivano la *proposizione generale* « tutti gli oggetti sono caldi » e la *proposizione particolare* o *esistenziale* « almeno un oggetto è caldo » o « esiste un oggetto caldo ». Rappresentiamo con f_a, xf_x e $\bar{x}f_x$ le tre proposizioni « a ha la qualità f », « tutti gli oggetti hanno la qualità f » e « almeno un oggetto ha la qualità f » (2).

Analogamente, da una forma f_{xy} ricaviamo le proposizioni f_{ab} « a ha la relazione f con b », xf_{xb} (« tutti gli oggetti hanno la relazione f con b »), xyf_{xy} (« ogni oggetto x ha la relazione f con ogni oggetto y »), $x\bar{y}f_{xy}$ (« per ogni x esiste almeno un y tale che x abbia la relazione f con y ») ecc. Se f_{xy} è la forma proposizionale « x è debitore di y », allora $\bar{x}f_{xb}$ è la proposizione « esiste almeno un x che è debitore di b », cioè « b è creditore », $\bar{y}f_{ay}$ è la proposizione « a è debitore » o « a ha debiti » e $\bar{x}\bar{y}f_{xy}$ è la proposizione « esistono un x e un y tale che x è debitore di y ». In modo

---

(1) Secondo la terminologia di ENRIQUES, x, y, z rappresentano l'*astratto* « oggetto ».

(2) PEANO scrive $\exists x \in (f_x)$ in luogo di $\bar{x}f_x$, ma non ha un simbolo che corrisponda esattamente a xf_x.

Digitized by Google

simile, il simbolo $\varphi F \varphi^x$ significherebbe la proposizione « ogni qualità di oggetti ha la qualità F », ecc.

I segni x, $\bar{x}$, φ, $\bar{\varphi}$ ecc. si chiamano *operatori logici*, mentre le forme proposizionali a cui precedono si dicono gli *operandi* rispettivi. (Non si confonda il tratto dell'operatore che indica una proposizione particolare con quello di negazione. Quest'ultimo si trova sopra una proposizione o una forma proposizionale, l'altro invece sopra un oggetto o un concetto variabile).

Ci resta ad introdurre la proposizione « l'oggetto a è *identico* all'oggetto b », la quale si scrive $a = b$. L'identità di proposizioni o di concetti non è essenziale per la logica formale.

Poniamo insieme nella tabella seguente le dodici nozioni fondamentali spiegate:

proposizione	p, q, r, s	*oggetto*	$a, b, c; x, y, z$
non (negazione) . . .	$\bar{p}$	*concetto* (qualità, relazione)	$f, g, h; \varphi, \chi, \psi$
o (disgiunzione) . . .	$p \cdot q$	*avere* (prop. singolare)	f_a
e (congiunzione) . . .	$p.q$	*tutti* (prop. generale)	xf_x
segue (implicazione) .	$\bar{p} \cdot q$, $p \rightarrow q$	*esiste* (prop. particolare) . . .	$\bar{x}f_x$
equivalente	$p \rightleftharpoons q$	*identico*	$a = b$

Dopo queste preparazioni siamo in grado di comprendere il fatto più importante della logica formale: ***Le nozioni e i simboli sopra enunciati sono sufficienti per esprimere tutti i concetti e le proposizioni non solamente della logica, ma perfino di tutta la matematica pura.*** Cioè: non solamente proposizioni come la regola del sillogismo BARBARA « se ogni oggetto che ha la qualità φ ha la qualità χ, e se ogni oggetto che ha la qualità χ ha la qualità ψ, allora ogni oggetto che ha la qualità φ ha la qualità ψ », ma anche ad es. i concetti di numero cardinale, numero ordinale, funzione, continuità, integrale e la proposizione « π è un numero trascendente » possono essere rappresentati usando soltanto questi simboli [1]. Come dice RUSSELL, « il fatto che tutta la matematica è

[1] E anche le parentesi, le quali, però, introducendo certe convenzioni, si possono evitare nella maggior parte dei casi.

Digitized by Google

logica simbolica è una delle più grandi scoperte della nostra età » (1).

Ad es. la regola sopra indicata del sillogismo BARBARA si scriverebbe nella maniera seguente:

$$\varphi\chi\psi\left[\overline{x(\overline{\varphi_x}\cdot\chi_x)}\cdot\overline{x(\overline{\chi_x}\cdot\psi_x)}\cdot x(\overline{\varphi_x}\cdot\psi_x)\right].$$

Si legga $x(\overline{\varphi_x}\cdot\chi_x)$ ecc. come « ogni oggetto che ha la qualità φ ha la qualità χ » o « ogni φ è χ » ecc. e $\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r$ come come « se vale p e se vale q, allora vale r ».

Si potrebbe contentarsi di un minor numero di nozioni fondamentali; come abbiamo veduto, la forme $p\!-\!\!<q$ e $p=\!\!<q$ possono essere scritte $\bar{p}\cdot q$ e $(\bar{p}\cdot q).(\bar{q}\cdot p)$ rispettivamente, ed in modo simile si potrebbe scrivere ad es. $\bar{\bar{p}}\cdot\bar{q}$ (« non è vero che non vale p o non vale q ») in luogo di $p\,.\,q$ e $\overline{x\bar{f}_x}$ (« non è vero che tutti gli oggetti non hanno la qualità f ») in luogo di $x\bar{f}_x$.

Naturalmente, sarebbe inutile eseguire effettivamente questa traduzione per tutta la matematica, ma, dal punto di vista pratico, è necessario introdurre anche altri segni (1, $+$, $<$ ecc.) come abbreviazioni per certe combinazioni di simboli fondamentali (2).

È utile distinguere due parti della logica formale: la *logica elementare delle proposizioni* e la *logica generale dei concetti*.

La prima si occupa di ciò che può essere espresso usando solamente le nozioni fondamentali della parte sinistra della nostra tabella, mentre la seconda comprende tutto il resto. Poichè la divisione indicata è in certo qual modo artificiale, una gran parte di ciò che avremo a dire intorno alla logica elementare varrà anche per la logica generale.

2. - La logica delle proposizioni.

Occupandoci della *logica elementare*, studiamo prima la rappresentazione delle *leggi logiche*. Se scriviamo qualsiasi espressione elementare, ad es. $p\,.\,\bar{\bar{q}}\cdot q$ (« da p e (non q) segue q »),

(1) *Principles of Mathematics*, pag. 5.

(2) Ciò è stato eseguito nel *Formulario Mathematico* di PEANO (il quale tuttavia usa un numero maggiore di nozioni fondamentali) e nei *Principia Mathematica* di WHITEHEAD E RUSSELL.

Digitized by Google

vediamo immediatamente che per giudicare la sua verità o falsità non è necessario conoscere il contenuto delle proposizioni p e q, ma basta sapere i *valori* di p e q, vale a dire, se sono vere o false. Se per es. p e q sono vere ambedue, si vede subito che l'espressione data è vera, mentre se p è vera e q è falsa, si osserva che l'ipotesi dell'implicazione data è vera e la conseguenza è falsa, e per ciò l'implicazione stessa è falsa. Invece, trattando nella stessa maniera la forma $p . \overline{\bar{q} \cdot p}$ (« da p e (non q) segue p »), si trova che per ogni sostituzione possibile dei valori « verità » e « falsità » per p e q, questa forma ha sempre il valore « verità ». Diciamo *formule logiche* quelle forme proposizionali che sono vere per ogni sostituzione possibile. (Questa definizione varrà ugualmente per la logica generale). È evidente che col metodo ora spiegato si può decidere per qualsiasi forma *elementare*, se sia una formula logica o no.

Ecco una collezione modestissima di formule logiche elementari:

$$p \cdot \bar{p}, \quad \overline{p \cdot \bar{p}}, \quad p \cdot (\bar{p} \cdot q) \rightarrow q, \quad \bar{\bar{p}} \rightleftarrows p, \quad p \cdot q \rightleftarrows q \cdot p, \quad p . q \rightleftarrows q . p,$$
$$p \cdot (q \cdot r) \rightleftarrows (p \cdot q) \cdot r, \quad p . (q . r) \rightleftarrows (p . q) . r, \quad p \cdot p \rightleftarrows p, \quad p . p \rightleftarrows p,$$
$$\overline{p \cdot q} \rightleftarrows \bar{p} . \bar{q}, \quad \overline{p . q} \rightleftarrows \bar{p} \cdot \bar{q}.$$

La prima formula è la *legge del terzo escluso* « ogni proposizione è vera o falsa », la seconda è la *legge di contraddizione* « nessuna proposizione è vera e falsa », la terza è la regola del cosidetto *modus ponens* « se p è vera e da p segue q, allora q è vera ».

Le altre formule indicate, essendo tutte equivalenze, rappresentano *regole di calcolo* di grande importanza, cioè tali regole che servono a trasformare una forma elementare data in una forma equivalente. La prima di queste è la *legge della doppia negazione* « (non non p) è equivalente a p ». Le quattro formule seguenti ci mostrano che la disgiunzione e la congiunzione ubbidiscono alle *leggi commutativa* ed *associativa*. Le ultime quattro formule costituiscono leggi a cui non corrispondono leggi dell'algebra: le *leggi di tautologia* « la disgiunzione e la congiunzione di una proposizione con sè stessa sono equivalenti alla proposizione stessa » e *della decom-*

Digitized by Google

posizione della negazione « la negazione di una disgiunzione è equivalente alla congiunzione delle negazioni dei termini; la negazione di una congiunzione è equivalente alla disgiunzione delle congiunzioni dei termini ».

Si osservi che, negando le proposizioni che figurano come termini nelle ultime due equivalenze e adoperando la legge della doppia negazione, si ricava:

$$p \cdot q = \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}, \quad p \cdot q = \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}.$$

Queste formule ci permettono di esprimere l'operazione della disgiunzione per quelle della negazione e della congiunzione e analogamente l'operazione della congiunzione per quelle della negazione e della disgiunzione. (Per es. invece di dire « domani il tempo sarà freddo e umido », si può dire in una maniera più complicata, ma collo stesso effetto « non è vero che domani il tempo non sarà freddo o non sarà umido », e lo stesso vale, se permutiamo « e » ed « o ».) Infatti basterebbero come concetti fondamentali della logica elementare quelli della preposizione e uno qualunque dei tre concetti della disgiunzione, della congiunzione o dell'implicazione.

La regola più interessante della logica elementare è la *legge distributiva*, nella quale la logica si rivela superiore all'aritmetica. Mentre questa deve contentarsi colla forma

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

in cui naturalmente non è lecito di permutare i segni + e ·, la logica ha le due forme

$$(p \cdot q) . r = (p . r) \cdot (q . r), \quad (p . q) \cdot r = (p \cdot r) . (q \cdot r).$$

Cioè vale una doppia distributività, e della congiunzione riguardo alla disgiunzione e della disgiunzione riguardo alla congiunzione. Perciò collo stesso procedimento con cui, nell'aritmetica, si trasforma un prodotto di somme in una somma di prodotti (l'operazione inversa non essendo possibile generalmente), possiamo sempre trasformare una congiunzione di disgiunzioni in una disgiunzione di congiunzioni e anche una disgiunzione di congiunzioni in una congiunzione di disgiun-

Digitized by Google

zioni. (Per es., invece di dire « domani il tempo sarà umido o ventoso, ma certamente freddo », possiamo dire « domani il tempo sarà umido e freddo oppure ventoso e freddo », e analogamente sono equivalenti le proposizioni « domani il tempo sarà umido e ventoso, oppure freddo » e « domani il tempo sarà umido o freddo ed anche ventoso o freddo ».

La simmetria perfetta di « o » ed « e » qui osservata vale per tutta la logica e s'estende anche a « tutti » ed « esiste ». Questa « dualità » della logica ha una stretta analogia alla dualità ben conosciuta della geometria proiettiva.

3. - La logica dei concetti.

S'intende che la *logica dei concetti* avrà una varietà di formule molto superiore a quella della logica delle proposizioni, per cui è impossibile darne una idea adeguata in poco spazio. Devo contentarmi di accennare pochi fatti interessanti.

Riguardo alle *regole di calcolo* della logica generale sussiste il fatto notevole che, trattando gli operatori come termini di disgiunzione o di congiunzione, tutte le regole di calcolo elementari date sopra restano *quasi* valide, cioè diventano regole valide a condizione che si aggiungano certe restrizioni.

Mi limito ad esporre questo fatto per la legge commutativa, a cui si aggiungono due restrizioni. In primo luogo il simbolismo richiede evidentemente che gli operatori precedano sempre gli argomenti rispettivi. Inoltre non si può, in generale, cambiare a piacere l'ordine degli operatori fra loro. Difatti abbiamo le equivalenze

$$xyf_{xy} \eqq yxf_{xy}, \quad \bar{x}\bar{y}f_{xy} \eqq \bar{y}\bar{x}f_{xy}$$

(« Se per ogni x vale che per ogni y vale f_{xy}, allora per ogni y vale che ogni x vale f_{xy}, e viceversa » e « se esiste un x tale che esiste un y tale che vale f_{xy}, allora esiste un y tale che esiste un x tale che vale f_{xy}, e viceversa »); ma abbiamo solamente l'implicazione

$$\bar{x}yf_{xy} \prec y\bar{x}f_{xy}$$

(« se esiste un x che per ogni y vale f_{xy}, allora per ogni y esiste un x (appropriato) tale che vale f_{xy} »), mentre l'impli-

Digitized by Google

cazione inversa sarebbe in generale falsa. Vale a dire, possiamo cambiare l'ordine di operatori che hanno lo stesso carattere, cioè che sono tutti generali o tutti particolari, purchè non siano separati da operatori del carattere opposto. Infatti è evidente che nel caso in cui esiste un x che ha la relazione f con ogni y, vale anche che per ogni y esiste un tale x, mentre nel caso in cui esiste per ogni y un x appropriato, ma non lo stesso x per tutti gli y, vale $y\bar{x}f_{xy}$ senza $\bar{x}yf_{xy}$.

Ammettiamo ad es. che x e y rappresentino numeri naturali e f_{xy} sia « x è maggiore ad y »; allora $y\bar{x}f_{xy}$ è la proposizione vera « per ogni numero naturale y esiste un numero naturale x maggiore ad x », mentre $\bar{x}yf_{xy}$ è la proposizione falsa « esiste un numero naturale x maggiore ad ogni numero naturale y ».

Per considerare un esempio più complicato, ma anche più istruttivo, ricordiamo che una successione infinita di numeri reali

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots$$

si dice *convergente*, se, per qualsiasi numero reale positivo z, esiste (almeno) un numero naturale u tale che il modulo delle differenza di due termini qualunque a_{u+v} e a_{u+w} che succedono ad a_u non superi z. Sopprimendo, per migliore evidenza, il punto di disgiunzione, scriviamo questa condizione:

$$z\overline{z > 0}\bar{u}\bar{v}\bar{w}(|a_{u+v} - a_{u+w}| \leqq z),$$

dove u, v, w sono numeri naturali variabili e z è un numero variabile (1). (Traduzione letterale: « ogni numero reale non è maggiore ad 0 o esiste per esso (almeno) un numero naturale u tale che per due numeri naturali qualunque v e w vale $|a_{u+v} - a_{u+w}| \leqq z$ ».)

---

(1) Per semplicità, rinunciamo a ridurre i concetti di numero naturale e di numero reale alle nostre nozioni fondamentali, ma, come è lecito dal punto di vista formale, trattiamo l'insieme dei numeri naturali e quello dei numeri reali come se fossero due insiemi (indipendenti fra loro) di oggetti. Si osservi che, sopprimendo le parentesi degli operandi, adoperiamo la legge associativa estesa agli operatori, la quale permette di porre o di togliere a piacere parentesi, purchè si includano in parentesi insieme ad un operatore anche tutti gli argomenti rispettivi. Cfr. *Formulario Mathematico*, ed. 5ª, prop. *3·5.

Digitized by Google

Supponiamo adesso che ci sia data una successione infinita di funzioni di un numero reale

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x), \quad \ldots$$

e una classe α di numeri reali (per es. un intervallo) e consideriamo le condizioni seguenti:

$$x\overline{\alpha_x}z\overline{z > 0}\bar{u}vw\{|f_{u+v}(x) - f_{u+w}(x)| \leqq z\},$$
$$z\overline{z > 0}\bar{u}vwx\overline{\alpha_x}\{|f_{u+v}(x) - f_{u+w}(x)| \leqq z\}.$$

La prima si legge: « se x è qualunque numero reale contenuto in α, allora per ogni numero reale positivo z esiste (almeno) un numero naturale u tale che per due numeri naturali qualunque v e w il modulo della differenza dei termini con gli indici $u+v$ e $u+w$ non supera z » (s'intende che l'appartenere ad una classe α è la stessa cosa come l'avere una qualità f) e dice che la successione data di funzioni è *convergente per ogni numero reale contenuto in* α. Invece la seconda si legge: « per ogni numero reale positivo z esiste (almeno) un numero naturale u tale che per due numeri naturali qualunque v e w e per qualunque numero reale x contenuto in α il modulo della differenza dei termini con gli indici $u+v$ e $u+w$ non supera z » e dice che la successione è *uniformemente convergente in* α.

Scrivendo (*) per l'operando comune, abbiamo le due formule

$$x\overline{\alpha_x}z\overline{z > 0}\bar{u}vw(*) \quad \text{e} \quad z\overline{z > 0}\bar{u}vwx\overline{\alpha_x}(*),$$

le quali, dal punto di vista formale, si distinguono nell'ordine dei termini $x, \overline{\alpha_x}, z\ldots$ (*). Il punto essenziale è che nella prima l'operatore generale x precede l'operatore particolare $\bar{u}$ mentre nella seconda x succede ad $\bar{u}$. La legge commutativa generalizzata (cioè estesa agli operatori) ci permette di cambiare in qualunque modo l'ordine dei termini (ricavando una forma equivalente alla forma data), purchè si eviti di cambiare l'ordine naturale fra un operatore e un argomento corrispondente e l'ordine di operatori di carattere diverso. Invece, cambiando ad es. l'ordine $\bar{u}x$ nell'ordine $x\bar{u}$, ricaviamo una forma che, nel caso generale, non è equivalente alla forma data, ma è soltanto una conseguenza di essa. Vale a dire, la condizione $x\overline{\alpha_x}z\overline{z > 0}\bar{u}vw(*)$ è una conseguenza della condi-

Digitized by Google

zione $z\overline{z \geq 0} \bar{u}vwx\overline{\alpha_x}$ (*). Quindi troviamo il teorema ben conosciuto: ciascuna successione uniformemente convergente in un insieme α è necessariamente convergente per ogni numero dell'insieme, ma non viceversa (1).

4. - La teoria dei tipi logici e le contraddizioni.

Abbiamo già veduto che i concetti non sono tutti dello stesso genere, ma possono essere qualità e relazioni duali, triadiche ecc. Una qualità può essere una qualità di oggetti, una qualità di qualità di oggetti, ecc. Comprendendo anche gli oggetti e le proposizioni, distinguiamo i seguenti *tipi* di entità logiche:

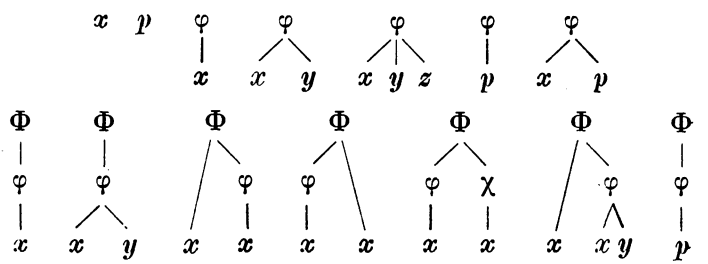
di ordine 0: oggetti (x) e proposizioni (p);

di 1° ordine: qualità di oggetti (φ^x), relazioni fra due oggetti (φ^{xy}), fra tre oggetti (φ^{xyz}) ecc., qualità di proposizioni (φ^p), relazioni fra oggetti e proposizioni (φ^{xp}) ecc.;

di 2° ordine: qualità di qualità di oggetti (Φ^{φ^x}), qualità di relazioni fra due oggetti ($\Phi^{\varphi^{xy}}$) ecc., relazioni fra oggetti e qualità di oggetti ($\Phi^{x\varphi^x}$), relazioni fra qualità di oggetti e oggetti ($\Phi^{\varphi^x x}$), relazioni fra due qualità di oggetti ($\Phi^{\varphi^x \chi^x}$), relazioni di oggetti con relazioni fra due oggetti ($\Phi^{x\varphi^{xy}}$) ecc., qualità di qualità di proposizioni (Φ^{φ^p}) ecc.

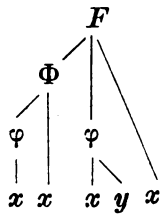
S'intende che nella maniera indicata possiamo procedere a concetti e a tipi di terzo ordine e di qualsiasi ordine finito.

Possiamo rappresentare qualunque tipo con un'« immagine di struttura », scrivendo p. es. i tipi sopra enumerati nella maniera seguente:



(1) Cfr. *Formulario Mathematico*, ed. 5ª, pag. 234.

Digitized by Google



Come esempio si veda l'immagine di struttura di un concetto di terzo ordine rappresentata nella figura annessa.

Vediamo che a ciascun concetto corrisponde un certo « albero », in guisa che concetti dello stesso tipo hanno alberi congruenti, mentre, quando si sostituiscono proposizioni variabili p, q,... per tutti o una parte degli oggetti variabili x, y,... che si trovano alle estremità dei rami, ricaviamo tipi differenti dallo stesso albero. (Ad es. dal tipo $\varphi^{x\nu}$ ricaviamo i tipi $\varphi^{p\nu}$, φ^{xq}, φ^{pq}).

Il punto saliente della teoria dei tipi è la convenzione che *una variabile trascorra nè meno nè più di un certo tipo* secondo la spiegazione ora data. Vale a dire, ad es. una qualità di oggetti non può essere allo stesso tempo una qualità possibile di qualità di oggetti o di relazioni fra oggetti. Se F_f ha un senso e g ha lo stesso tipo come f, F_g ha un senso anch'essa, altrimenti no. (Ad es. la frase « la verità non è verde » è priva di senso, perchè « verde » è una qualità di oggetti, mentre « verità » non è un oggetto, ma una qualità di proposizioni). S'intende che anche in una forma φF_φ o $\bar{\varphi} F_\varphi$ la variabile φ deve riferirsi a tutte e sole le entità di un certo tipo (determinato dal tipo di F). Cioè non ammettiamo le frasi « ogni entità », « ogni concetto », « ogni qualità », « esiste una entità » ecc., ma solamente « ogni qualità di oggetti », « esiste una qualità di relazioni fra due oggetti » ecc.

Ma si domanderà: Sono appropriate per la logica e per la matematica le variabili limitate ad un solo tipo, ovvero è necessario ammettere anche variabili che trascorrono più di un tipo, ad es. tutte le qualità in generale o tutti i concetti o tutte le entità possibili?

È difficile dire se sia assolutamente proibito ammettere anche questi tipi generalizzati, ma possiamo asserire che nè la logica formale, nè la matematica ne ha bisogno; ad ogni modo l'ammetterli ci espone a qualche pericolo. Anzi, ammettendoli senza restrizione, arriveremo a ragionamenti privi di senso e a contraddizioni.

Supponiamo ad es. che la variabile φ trascorra tutte le qualità, cioè tutte le qualità di qualunque entità possibile,

Digitized by Google

vale a dire, che φ_x abbia sempre un senso, se φ è qualunque qualità e x è qualunque entità. Segue da questa supposizione che anche φ_φ deve avere un senso. Adesso consideriamo la qualità speciale $(\overline{\varphi_\varphi})^\varphi$, cioè « non appartenere a se stesso ». Chiamandola F^φ, abbiamo l'equivalenza generale $\varphi(F_\varphi \eqsim \overline{\varphi_\varphi})$. Giacchè questa equivalenza vale per tutte le qualità, deve valere anche per F; ma sostituendo F ricaviamo il risultato assurdo $F_F \eqsim \overline{F_F}$.

Lasciando a parte il simbolismo, riflettiamo nella maniera seguente: la qualità « non appartenere a sè stesso » nè può appartenere a sè stessa nè può non appartenere a sè stessa. Infatti, « " non appartenere a sè stesso „ appartiene a sè stesso » significherebbe appunto « " non appartenere a sè stesso „ non appartiene a sè stesso », mentre « " non appartenere a sè stesso „ non appartiene a sè stesso » significherebbe « " non appartenere a sè stesso „ appartiene a sè stesso ». Pertanto la qualità « non appartenere a sè stesso » è evidentemente un concetto paradossale. Questa contraddizione è stata scoperta indipendentemente da ZERMELO e da RUSSELL. Per ciò che precede pare necessario o almeno raccomandabile escludere in principio tali concetti, ammettendo la teoria dei tipi logici sopra spiegata.

Ma finora non sappiamo neppure, se questa teoria, benchè renda possibile esprimere tutta la logica e la matematica, sia anche sufficiente per evitare ogni contraddizione.

Occupiamoci di un paradosso che, a prima vista, sembra il paradosso di ZERMELO-RUSSELL in una forma un po' modificata. Consideriamo tutti gli aggettivi, per es. della lingua italiana. Distinguiamo due categorie di aggettivi: 1° quelli che posseggono la qualità da essi indicata e 2° quelli che non posseggono la qualità da essi indicata. Per es. gli aggettivi « italiano » e « cinquesillabo » appartengono alla prima categoria, perchè infatti l'aggettivo « italiano » è italiano e l'aggettivo « cinquesillabo » è cinquesillabo, mentre « tedesco » e « trisillabo » appartengono alla seconda categoria, perchè « tedesco » non è tedesco e « trisillabo » non è trisillabo. Diciamo « autologici » gli aggettivi della prima categoria e « eterologici » quelli della seconda. Allora domandiamo: a quale categoria appartiene l'aggettivo « eterologico »? Ammettiamo che appartenga alla prima categoria, vale a dire, che sia autologico, cioè non

Digitized by Google

eterologico. Ma « (eterologico) non è eterologico » significa appunto che « eterologico » non ha la qualità da esso indicata, vale a dire, che è eterologico. Invece ammettendo che « eterologico » appartenga alla seconda categoria, avremo « (eterologico) è eterologico », cioè appunto « (eterologico) è autologico » (1).

Malgrado la sua stretta analogia colla prima, questa forma è più difficile di quella. Pare incontestabile che gli aggettivi, in caso che intendiamo le parole scritte o stampate, siano veramente oggetti e perciò abbiano lo stesso tipo, e ci accorgiamo che perfino il concetto di qualità d'oggetti è paradossale!

Ecco un'altra contraddizione dello stesso genere: qualunque numero naturale può essere espresso nella lingua italiana, sia per il nome numerale corrispondente, sia per una descrizione in parole, come ad es. « il numero primo pari » (2) o « il massimo numero che può esser scritto con tre cifre » $\left(9^{9^9}\right)$. Limitandoci a descrizioni che non contengono più di cento lettere, vediamo subito che l'insieme dei numeri naturali corrispondenti è necessariamente finito. Per conseguenza, esistono numeri naturali non definibili con al più cento lettere, e fra loro un minimo. Ma « il minimo numero naturale non definibile con al più cento lettere » sarebbe tuttavia definito con meno di cento lettere! (2).

Si mostra facilmente che anche l'insieme delle proposizioni, vale a dire, il concetto « proposizione » è paradossale. L'esempio più antico di una contraddizione di questo genere è quella ben conosciuta del « Cretense bugiardo », il quale dice che tutti i Cretensi sono bugiardi, senza usare la cautela di escludere sè stesso.

Preferisco dare una forma più moderna e più precisa di questa contraddizione. Ammettiamo che sopra una tavola

---

(1) Questa contraddizione è stata indicata da GRELLING e NELSON. Cfr. *Abhandlungen der Friesschen Schule*, neue Folge, Bd, II, 1908.

(2) Questa contraddizione è una modificazione (indicata da G. G. BERRY) di quella ben conosciuta di RICHARD. Cfr. WHITEHEAD e RUSSELL, *Principia Mathematica*, vol. I, pag. 61.

Digitized by Google

siano scritte le proposizioni seguenti:

« Due per due fanno cinque.
La luna è fatta di formaggio verde.
Tutto ciò che si trova scritto sopra questa tavola è falso .»

Esaminando l'ultima proposizione, ci accorgiamo che questa è falsa se è vera, e vera se è falsa!

Nel primo caso (quello del paradosso degli aggettivi) si tratta di una classe di oggetti e di una qualità di oggetti che presuppone una certa classe di qualità dello stesso genere, vale a dire, una certa qualità di qualità di oggetti, che appartiene anche alla qualità in questione. La sola differenza del secondo caso (del « minimo numero naturale non definibile con al più cento lettere ») dal punto di vista logico è quella che le collezioni di al più cento lettere non possono essere considerate come oggetti nel senso stretto, perchè non sono tutte realizzate nel mondo reale, come accade per gli aggettivi; ma in ogni caso hanno lo stesso tipo. Analogamente nel terzo caso (del « Cretense bugiardo ») ci è data una proposizione che presuppone una certa classe finita di proposizioni, cioè una certa qualità di proposizioni (quella di trovarsi scritta sopra la tavola), che appartiene anche alla proposizione stessa.

Vediamo che, malgrado la nostra teoria dei tipi logici, arriviamo a nuove contraddizioni, vale a dire, che neppure i tipi logici sono consistenti. Sarà dunque necessario scomporre ciascuno di questi tipi (con la sola eccezione del tipo degli oggetti) fino ad arrivare ad insiemi consistenti. Questa decomposizione è infatti possibile ed è stata eseguita nei *Principia Mathematica* di RUSSELL e WHITEHEAD.

Ma sfortunatamente questa teoria ci reca nuove e gravissime difficoltà. Infatti, essendo ciascuna variabile limitata ad un tipo nel nuovo senso, è difficile ottenere che qualunque proposizione logica o matematica sia espressa appropriatamente. Abbiamo per es. la conseguenza stranissima che i numeri naturali non hanno più lo stesso tipo, ma tipi tutti diversi fra loro. Oltracciò diventerebbe falsa una parte considerevole delle dimostrazioni della matematica, ad es. quella del teorema « qualunque insieme infinito e limitato di numeri reali ha un limite superiore », cioè diventerebbe problematica la maggior parte della teoria dei numeri reali e delle funzioni, ed anche la maggior parte della teoria degli insiemi.

Digitized by Google

Esistono due possibilità per trarsi da quest'impiccio. O si introduce un certo assioma (o meglio: postulato), il cosiddetto « assioma di reducibilità », o si rinuncia con un gesto eroico a tutto ciò che non si adatta di buona voglia alla teoria stabilita. RUSSELL ha scelto la prima, ma senza esser veramente soddisfatto da questo espediente, WEYL e BROUWER la seconda.

Dal canto mio, non trovo le contraddizioni della seconda categoria così gravi come accade generalmente; a me sembra tuttavia possibile e lecito contentarsi della teoria spiegata prima. Infatti le contraddizioni della seconda categoria non sono puramente logiche; tutte presuppongono una certa relazione empirica fra oggetti e qualità o fra oggetti e proposizioni, quella fra il segno e la cosa indicata. Giacchè questo elemento empirico (o psicologico) è essenziale per i paradossi della seconda categoria, non c'è affatto pericolo che, trascurando l'ulteriore suddivisione dei tipi di RUSSELL, si possa arrivare a contraddizioni nella matematica. Infatti, le contraddizioni della matematica pura, come ad es. quella pubblicata da BURALI-FORTI, appartengono tutte alla prima categoria.

Rammentando che qualunque concetto o proposizione logica può essere espressa per mezzo della logica delle proposizioni e dei concetti, si può essere indotti a pensare che queste due parti comprendano necessariamente tutto il sistema della logica formale. Ma questo sarebbe uno sbaglio. Infatti, si può arrivare ad altre parti della logica, introducendo certe restrizioni importanti. Lo spazio non mi permette che di accennarle con pochissime parole.

La prima restrizione consiste nel limitarsi ai cosiddetti concetti « estensionali » di concetti, vale a dire, a quei concetti di concetti che concernono essenzialmente l'« estensione » dei concetti in questione, cioè la « classe » o la « corrispondenza » definita da loro. Arriviamo così alla *logica delle classi* e alla *logica delle corrispondenze.*

Dal punto di vista pratico è utile introdurre due simbolismi speciali e semplificati per questi concetti e le proposizioni che contengono soltanto tali concetti. Continuando questa via, un'altra restrizione di un simile carattere ci condurrebbe all'*aritmetica dei numeri cardinali e ordinali.*

Halle a. S., Università.

HEINRICH BEHMANN

Digitized by Google

Sull'immaginario in geometria

PARTE II - Le cassinoidi e le curve di Darboux.

8. **Cassinoidi.** — Ci proponiamo di studiare le curve piane, luogo dei punti le cui distanze da un certo gruppo di poli danno un prodotto costante. Queste curve han ricevuto il nome di *cassinoidi*, presentandosi come estensioni della curva di CASSINI, che risponde al caso di due poli. Talvolta sono anche dette *lemniscate*, generalizzando il nome della lemniscata di BERNOUILLI, che è il luogo dei punti il cui prodotto delle distanze da due poli A e B eguaglia il quadrato della metà di AB.

Consideriamo dapprima la curva di CASSINI, luogo dei punti le cui distanze da due punti (generici) A e B danno un rapporto costante (non nullo). Questa curva K è del 4° ordine, come appare subito dall'equazione. Essa deve soddisfare a due condizioni:

1° La K non può segare la retta all'infinito del piano in un punto P fuori dei punti ciclici M e N, perchè la distanza PA (e similmente la PB) diverrebbe infinita. Per lo stesso motivo la K, passando p. es. per M, non può avere in M un ramo tangente alla retta all'infinito, sul quale P, accostandosi ad M, diverrebbe infinita.

2° La K non può neppure segare una retta isotropa per A o B, p. es. AM, in un punto P a distanza finita, perchè la distanza PA e quindi il prodotto $PA \cdot PB$ si annullerebbe. Quindi la K tocca coi suoi due rami per M le due rette isotrope AM e BM, ad anzi queste debbono essere tangenti d'inflessione per i detti rami.

Digitized by Google

In conclusione: *La curva di Cassini è una quartica che passa doppiamente per i due punti ciclici del piano ed ha un flesso su ciascuno dei quattro rami uscenti da* M *e* N.

Queste proprietà caratterizzano la curva di Cassini. Se una quartica K, soddisfacente ad esse, è reale, le tangenti principali m_1 e m_2 in M, sono immaginarie coniugate alle tangenti n_1 e n_2 in N, sicchè i punti $A = m_1 n_1$, $B = m_2 n_2$, sono reali: la K è luogo di punti il cui prodotto delle distanze da A e B riesce costante.

Infatti, se sopra la quartica K si fa muovere un punto P, il prodotto delle distanze $PA \cdot PB$ non si annulla mai a distanza finita, e nei punti all' infinito M e N — accostandosi ad essi sopra i rami che vi passano — si conserva pure finito e diverso da zero: giacchè, per il ramo osculatore a PM accade che la distanza PA diventi zero (del 1° ordine) mentre la distanza PB diventa infinita dello stesso ordine.

Il resultato ottenuto riesce confermato da un calcolo di costanti, che pure, a prima vista, conduce ad un *paradosso*.

Le quartiche piane dipendono da 14 costanti arbitrarie. L'imposizione d'un punto doppio equivale a 3 condizioni lineari e così le quartiche passanti doppiamente per M e N dipendono da $14 - 6 = 8$ parametri. Ora, se una tangente principale in M o in N deve essere tangente di flesso, si ha una condizione lineare; in tuttto dunque 4 condizioni, che sembran ridurre a $8 - 4 = 4$ i parametri da cui dipendono le curve di Cassini. Ma i due poli d'una tal curva dipendono da 4 parametri (le loro coordinate nel piano) e resta ancora la costante a cui si eguaglia il prodotto delle distanze. Dunque le curve di Cassini contengono in effetto 5 e non 4 parametri! Come si spiega il paradosso?

La risposta è che le condizioni perchè le tangenti principali nei due punti doppi d'una quartica sieno tangenti di flesso pei relativi rami, non sono condizioni indipendenti: *se una quartica passante per* M *e* N, *oscula tre rami lineari uscenti da questi punti, essa oscula anche il rimanente ramo.*

Per dimostrarlo si consideri il sistema lineare di tutte le quartiche K che passano doppiamente per M e N: questo sistema ha la dimensione 8 e il grado 8, cioè due K si segano (fuori di M, N) in un gruppo di 8 punti comuni alle K di un fascio; si deduce che le quartiche K passanti per 7 punti

Digitized by Google

del piano passano in generale per un 8° punto da esse determinato.

Fra i gruppi di punti intersezioni di due K, vi è quello formato dalle intersezioni d'una K generica colla retta $r = MN$ contata 4 volte, che — detratte le 8 intersezioni assorbite in generale dai punti doppi M e N — contiene 8 punti, costituiti da 4 coppie di punti infinitamente vicini ad M e N, sui rami di K. Ciò posto, si supponga che per una K irreducibile, tre delle tangenti principali ai rami per M e N (per es. m_1, m_2, n_1) osculino i relativi rami; allora la quartica formata da tutte e quattro le tangenti principali m_1, m_2, n_1, n_2, contiene 7 fra le intersezioni della nostra K colla retta r^2, e quindi contiene anche l'8° punto d'intersezione: quanto dire che la tangente principale n_2 oscula anch'essa il corrispondente ramo di K (per N).

Le cose dette per la quartica di CASSINI si estendono facilmente alle cassinoidi d'ordine superiore.

La cassinoide luogo dei punti del piano per cui è costante il prodotto delle distanze da n *poli, è una curva d'ordine* 2n *passante* n *volte per ciascuno dei punti ciclici* M *e* N, *e caratterizzata dalla proprietà di possedere su ciascuno dei* 2n *rami per* M *o* N *un flesso d'ordine* n — 1: cioè un contatto $(n+1)$ punto colla tangente.

9. Le curve di Darboux. — DARBOUX ha considerato una famiglia di curve piane che, come vedremo costituisce una generalizzazione delle cassinoidi, e che si lasciano definire in relazione a due serie di poli $A_1, A_2, \ldots$ e $B_1, B_2 \ldots$ *come luoghi di punti per cui il prodotto delle distanze d'un punto dai poli della prima serie ha un rapporto costante al prodotto delle distanze dai poli della seconda serie:*

$$PA_1 \cdot PA_2 \ldots = kPB_1 \cdot PB_2 \ldots \qquad (k \neq 0, 1, \infty).$$

Consideriamo in particolare il caso in cui si abbiano due coppie di poli A_1, A_1, e B_1, B_2:

$$\frac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2} = k.$$

La formula stabilita nel § 4 mostra che *per i punti* P *della curva riesce costante anche la somma algebrica degli angoli*

Digitized by Google

secondo cui si vedono le due coppie formate dai punti associati ad A_1, B_1 ***e*** A_2, B_2.

Questa proprietà si estende in generale alle *curve di Darboux* relative a due serie di n poli, che appariscon dunque come ***luoghi di punti per cui riesce costante la somma algebrica degli angoli secondo cui si vedono*** n ***segmenti dati del piano*** (1).

DARBOUX ha scoperto questa bella proprietà, di cui godono tutte le curve luogo di punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n e m poli hanno rapporto costante; le quali, per $m < n$, rientrano pure come caso particolare nella famiglia sopra considerata, siccome dimostreremo nel seguito.

10. La quartica di Darboux definita in relazione ai punti ciclici. — Per caratterizzare le curve di DARBOUX, dal punto di vista delle relazioni proiettive coi punti ciclici, ci varremo di considerazioni sintetiche, a cui si è condotti per naturale estensione dallo studio del caso ($n = 1$) del cerchio (§ 6).

Riferiamoci al caso semplice delle curve di DARBOUX con due coppie di poli, che — come appare subito dall'equazione — sono del 4° ordine. Affinchè il rapporto $\frac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2}$ si mantenga sempre eguale alla costante $k \neq 1$, esso non deve mai diventare 1, nemmeno quando P va all'infinito sopra la curva; segue da ciò che la quartica non può segare la retta all'infinito in altri punti che nei punti ciclici M e N, ed anche che in questi non può avere un ramo tangente alla retta all'infinito, poichè accostandosi P per es. ad M, sopra il ramo, il rapporto fra i detti prodotti di distanze tenderebbe ad 1. Pertanto la quartica di DARBOUX passa doppiamente per M e N.

Oltre a ciò essa deve soddisfare a condizioni ulteriori. Poichè una retta isotropa come la A_1M, sega la curva in un punto P che ha da A_1 una distanza $PA_1 = 0$, onde non si annulli il nostro rapporto di prodotti bisogna che si annulli in pari tempo anche la distanza PB_1 o PB_2, sia per es. PB_1. Allora PB_1 sarà pure una retta isotropa: $PB_1 = PN$.

Si riconosce in tal guisa che le due coppie di punti (generalmente a distanza finita), P_1P_2 e P_3P_4, in cui la quartica

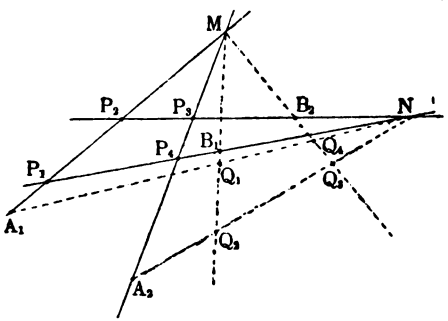
(1) Cfr. DARBOUX, l. c.

Digitized by Google

di DARBOUX, K, viene segata dalle rette isotrope, MA_1 e MA_2, sono anche due coppie di punti appartenenti alle rette isotrope NB_1 e NB_2.

Similmente le due coppie di rette isotrope NA_1, NA_2 e MB_1, MB_2, si segheranno in 4 punti $Q_1Q_2Q_3Q_4$, appartenenti alla K.

Queste condizioni sono espresse dall'annessa figura, ove tutti i punti sono segnati *come se* fossero reali. Esse *valgono a caratterizzare la quartica di Darboux, K,* potendosi dimostrare la costanza del rapporto dei prodotti delle distanze in relazione alle coppie di poli A_1A_2 e B_1B_2. Infatti, facendo variare un punto P sulla curva, si verifica che il rapporto $\frac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2}$ non diventa mai



zero o infinito, nè quando P va all'infinito in M o N, nel qual caso PA_1, PA_2, PB_1, PB_2 diventano infinite dello stesso ordine, nè quando P va sopra una retta isotropa per A_1, A_2 o B_1, B_2, cioè assume la posizione d'uno dei punti $P_1P_2P_3P_4$ o $Q_1Q_2Q_3Q_4$, nel qual caso numeratore e denominatore del rapporto diventano infinitesimi dello stesso ordine. E però quel rapporto rimane costante.

Ora sorge una domanda: che cosa importano le condizioni sopra espresse per una quartica, K, soggetta ad avere due punti doppi in M e N?

La risposta può esser data molto semplicemente per chi conosce gli elementi della geometria delle curve ellittiche, ossia di genere 1 (1).

La K, passante doppiamente per M e N, è una curva di genere 1, sulla quale le rette per M e N segano due involuzioni g_2^1. Quando si proiettano da N sulla stessa K le coppie di punti di K allineate con M, si trasforma la prima g_2^1 in

(1) Cfr. p. es. ENRIQUES-CHISINI: *Lezioni sulla teoria geometrica...*, vol. III, §§ 7, 27.

Digitized by Google

un'altra g_2^1, che, se è distinta dalla data, non avrà coppie comuni con essa. Dunque, se i due punti P_1P_2 allineati con M sono proiettati da N su K, in altri due punti, P_3 e P_4, pure allineati con M, vuol dire che la g_2^1 segata su K dalle rette per M viene trasformata in se stessa dall'involuzione analoga segata dalle rette per N: in altre parole *le due involuzioni* g_2^1 *sono permutabili.*

Se sussiste questa relazione simmetrica di permutabilità, anche ogni coppia di punti allineati con M, dovrà esser proiettata da N in una coppia di punti allineati con M, e reciprocamente due punti di K allineati con N saran proiettati da M in due dunti ancora allineati con N.

Così essendo, si può costruire la figura sopra disegnata a partire da un punto A, scelto nel piano in maniera arbitraria. Infatti, assunto A in un punto generico del piano, determineremo i punti P_1 e P_2 sezioni di MA colla K, e quindi i punti P_3 e P_4 loro proiezioni da N, i quali si troveranno sopra una retta per M: a questa retta dovrà dunque appartenere anche il punto A_2. Ma ora seghiamo la K colla retta NA, in Q_1Q_4; proiettando Q_1Q_4 da M sulla K stessa, si avranno due punti Q_2Q_3 allineati con N, e sulla Q_2Q_3 dovrà pure trovarsi anche il punto A_2, che così riesce determinato.

Infine anche i punti B_1 e B_2 verranno determinati come intersezioni rispettivamente delle rette P_1N, Q_1M e P_2N, Q_3M.

In conclusione potremo enunciare il teorema:

La quartica di Darboux è caratterizzata come curva del 4° ordine che passa doppiamente pei punti ciclici M, N *del piano, e su cui le rette per* M, N *segano due involuzioni permutabili. Questa quartica costituisce il luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due coppie di poli stanno in un rapporto costante, e ciò relativamente ad una serie* ∞^2 *di quaterne di poli: una quaterna* (come DARBOUX pure ha avvertito) *resta determinata dalla scelta arbitraria, nel piano, di uno dei suoi punti.*

È facile valutare il numero dei parametri da cui dipendono queste curve; anzi, effettuandosi il computo in due modi diversi, se ne trae una conferma dei risultati stabiliti.

L'imposizione d'un punto doppio importa per una curva 3 condizioni, e la permutabilità di 2 involuzioni g_2^1 sopra una curva ellittica dà luogo ad *una* condizione, che significa

Digitized by Google

l'equivalenza delle serie doppie (serie complete g_4^3) [1]; perciò le quartiche di DARBOUX contengono $14-6-1=7$ parametri. Allo stesso resultato si arriva contando le 8 costanti da cui dipendono le due coppie di poli A_1A_2 e B_1B_2, e la costante data dal rapporto del prodotto delle distanze $\frac{PA_1\cdot PA_2}{PB_1\cdot PB_2}$; purchè si diminuisca il numero, 9, così ottenuto, di 2, in vista della circostanza che una quartica di DARBOUX è tale rispetto ad ∞^2 quaterne di poli.

11. Casi particolari. — La quartica di DARBOUX essendo definita per rispetto ad una serie di poli, vi è luogo a considerare il caso particolare in cui uno di questi va all'infinito e la curva appare quindi come luogo di punti per cui il prodotto delle distanze da due poli e la distanza da un terzo polo stanno in un rapporto costante. Inoltre, particolarizzando la quartica, si presenta anche il caso in cui essa compaia come luogo dei punti le cui distanze da due poli danno un rapporto costante, cioè come una curva di CASSINI.

La quartica K essendo affatto generale (con due punti doppi in M e N e le relative g_2^1 permutabili) si può ottenere una particolare quaterna di poli, facendo coincidere la retta per N cui appartengono P_1 e P_3 colla retta all'infinito NM: ciò accade se si scelga A_1 sopra una delle due tangenti principali a K in M; allora A_2M sarà la tangente principale all'infinito, e così anche Q_3 e Q_4, le A_1N e A_2N resultando tangenti principali ai rami di K in N. La *quartica,* K, *di Darboux, appare così anche il luogo dei punti* P *per cui il prodotto delle distanze* $PA_1\cdot PA_2$ *ha un rapporto costante alla distanza da un unico polo,* B.

---

[1] Questa equivalenza si può esprimere, come è noto, in base al teorema d'ABEL, eguagliando le somme dei valori degl'integrali ellittici di prima specie

$$2I(P_1)+2I(P_2)\equiv 2I(P_3)+2I(P_4) \qquad \text{(mod. } \omega, \omega'\text{)}.$$

L'integrale I (coi periodi ω, ω'), relativo ad una quartica $f(xy)=0$ passante doppiamente per i punti all'infinito M e N, vien dato da

$$I=\int\frac{dx}{f_y'}.$$

Digitized by Google

Per particolarizzare ulteriormente la generazione della K, mandando all'infinito anche B_1, occorre che la K stessa soddisfi a condizioni particolari. Infatti, bisogna che anche P_1 e P_4 vadano all'infinito vicino ad M, e però che le tangenti ai due rami di K in M siano tangenti di flesso per questi rami. Se ciò accade, anche Q_1 e Q_2 come Q_3 e Q_4 andranno all'infinito vicino ad N, cioè le tangenti principali di K in N resulteranno tangenti di flesso pei rispettivi rami. *La* K *così particolarizzata è la curva di Cassini, luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze dai poli* A_1 *e* A_2. Ed invero la proprietà caratteristica che abbiamo indicato per questa curva, implica — come subito appare — che le due g^1_2 segate dalle rette per M e N, siano permutabili: quando sussista per una quartica tale relazione, le quattro tangenti ai rami pei punti doppi M ed N resulteranno tangenti di flesso pei rispettivi rami, ove ciò accada per *due* di esse; si ritrovano così le tre condizioni perchè una quartica passante doppiamente per M e N, sia una curva di CASSINI.

Il resultato ottenuto ci permette di enunciare che: *la quartica di Cassini può ritenersi anche, in infiniti modi, come luogo di punti i cui prodotti da due coppie di poli sono in un rapporto costante*; uno dei poli della quaterna può scegliersi ad arbitrio, nel piano, sopra una retta per M, diversa dalle tangenti principali.

12. Curve di Darboux d'ordine n. — I resultati, che abbiamo svolto per le curve di DARBOUX relative a due coppie di poli, si estendono al caso di due serie di poli qualsiansi. Così, il luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due terne di poli $A_1 A_2 A_3$ e $B_1 B_2 B_3$ sono in un rapporto costante, sarà una sestica, K_6, passante triplamente per i due punti ciclici, M e N, e su cui le rette per M e N segheranno due g^1_3 permutabili. S'intende con ciò che tre punti di K_6 allineati con M verranno proiettati da N, sulla K_6 stessa, in sei punti costituiti da due terne ancora allineate con M; e reciprocamente per tre punti allineati con N. Questa relazione, come nel caso delle due g^1_2 sulla quartica di genere 1, si esprime affermando l'equivalenza dei tripli delle due g^1_3: cioè dicendo che codesti tripli sono contenuti in una medesima serie completa g^5_9, sulla K_6 di genere 4.

Digitized by Google

Infatti, i gruppi di 9 punti formati da terne allineate con M e N costituiscon gruppi comuni alle serie complete (non speciali) g_9^5 triple delle nostre g_3^1, le quali g_9^5 debbon quindi coincidere (1); ma se tali serie coincidono, le g_9^3 composte delle terne delle due g_3^1 avran comune una g_3^1, cioè vi saranno ∞^1 gruppi G_9 composti di terne allineate con M e N; ogni terna allineata con M o N farà parte d'un tal G_9; ossia le due g_3^1 saranno permutabili, nel senso innanzi spiegato.

Anche qui la K_6 apparirà come luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due terne di poli danno un rapporto costante, e ciò rispetto ad una serie di ∞^2 sestine di poli: dove è possibile scegliere un polo ad arbitrio ecc.

Il numero dei parametri da cui dipendono le curve di DARBOUX del 6° ordine può determinarsi facilmente in due modi, il cui accordo vale anche come dimostrazione della proprietà caratteristica di esse.

Le curve del 6° ordine con due punti tripli M e N contengono $\frac{6 \cdot 9}{2} - 2 \cdot 6 = 15$ costanti arbitrarie; e la permutabilità delle due g_3^1 segate dalle rette per M e N, che significa la equivalenza di due gruppi di 9 punti composti da terne delle due serie, porta 4 condizioni, essendo 4 il genere della curva; queste condizioni, possono esprimersi col noto teorema d'ABEL, eguagliando due somme d'integrali abeliani. Così rimangono $15 - 4 = 11$ parametri.

Allo stesso numero si arriva contando le $2 \cdot 6 = 12$ costanti da cui dipendono le due terne di poli, nonchè la costante che esprime il rapporto dei prodotti delle distanze; poichè una stessa curva di DARBOUX ammette una serie ∞^2 di poli.

Ciò che si è detto per il caso $n = 3$ si estende ora al caso di n qualunque e si ottengono, pure per n qualunque, i casi particolari corrispondenti a quelli considerati per $n = 2$.

Ci limiteremo ad enunciare i resultati che in tal guisa si ottengono.

La curva di Darboux, luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n *poli ciascuna sono in rapporto costante, è in generale una curva d'ordine* 2n *di genere*

$$p = n^2 - 2n - 1,$$

(1) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, op. cit. § 17.

Digitized by Google

passante n ***volte per i due punti ciclici*** M ***e*** N, ***e caratterizzata dalla proprietà che gli*** n***-pli delle*** due g_n^1 ***segate dalle rette per*** M ***e*** N ***appartengono alla stessa serie lineare*** $g_{n^2}^{n^2-p}$. ***La curva gode della sua proprietà rispetto ad*** ∞^2 ***coppie di serie di poli, potendosi scegliere ad arbitrio uno dei poli.***

Le curve, luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n ***e*** m ($m < n$) ***poli, sono in un rapporto costante, appartengono alla stessa famiglia delle curve anzidette, i poli della prima serie trovandosi su rette che hanno un contatto d'ordine*** $n - m$ ***coi rami della curva in*** M ***e*** N.

In particolare, per $m = 0$, ***rientrano fra le curve di Darboux le cassinoidi,*** luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze da *n* poli: tali poli si trovano sopra rette osculatrici (con contatto d'ordine *n*) ai rami della curva.

Questi sviluppi e conclusioni mostrano l'uso che può farsi in problemi elementari o quasi elementari, non solo dell'immaginario, bensì anche dei concetti e dei teoremi della geometria algebrica: i quali, per la loro generalità ed importanza, meritano di essere più divulgati fra gl'insegnanti.

FEDERIGO ENRIQUES

Un quesito di Zuan da Coi ed il problema di Delo

Sono grato al prof. LORIA di aver fatto rilevare la relazione fra il problema proposto dal M. ZUAN DA COI al CARDANO [1], di cui ho dato notizia nella mia nota: *Sulla scoperta della risoluzione algebrica delle equazioni del quarto grado* (pubblicata nel VI, pag. 11 di questo « Periodico »), ed una delle costruzioni del *Problema di Delo*, indicata nei « Commentari » di EUTOCIO [2]. Basta uno sguardo alla figura per

---

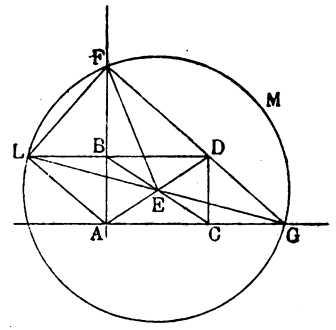
[1] Condurre dal centro *E* del rettangolo *ABCD* due rette *EF*, *EG*, che incontrino i prolungamenti dei lati *AB*, *AC* in punti *F*, *G* allineati col vertice *D*.

[2] G. LORIA: *Nota sopra una antica soluzione del problema di Delo.* « Boll. di matematica », Sezione Storico-bibliografica, aprile 1927, pag. I-III. A completamento della indicazione bibliografica data dal LORIA, aggiun-

Digitized by Google

scorgere che i segmenti *CG*, *BF* determinati al modo richiesto da M. ZUAN, sono appunto le due medie proporzionali tra i lati *AC*, *AB*, del rettangolo dato.

Quella medesima costruzione del classico problema, si trova esposta anche nell'articolo di A. CONTI: *Problemi di terzo grado* nel terzo volume delle « Questioni riguardanti le matematiche elementari » raccolte e coordinate da F. ENRIQUES, alla pag. 364, ed ivi attribuita ad APOLLONIO.



A conferma di quanto dice il prof. LORIA sulla conoscenza della letteratura geometrica dei greci presso i dotti del sec. XVI, aggiungerò che quella stessa costruzione è riportata dal BOMBELLI nella sua *Algebra* (1) ove è fatta seguire dalla costruzione meccanica attribuita a PLATONE, in modo da far intendere che lo strumento di PLATONE serve appunto a realizzare quella costruzione geometrica, che PAPPO ed EUTOCIO ci hanno tramandato.

L'argomento interessa anche la storia dell'Algebra, perchè dalla costruzione di PLATONE, che il BOMBELLI eseguisce col sussidio del movimento di due squadre, venne l'idea di quella dimostrazione della esistenza di radici reali per la equazione cubica nel caso irreducibile, che è una delle belle scoperte del BOMBELLI.

La relazione fra la costruzione geometrica ora ricordata e la costruzione meccanica attribuita a PLATONE si dimostra in poche parole.

Basta infatti completare il cerchio *FMG* (2), e subito si scorge che il diametro *GE* passa per il punto *L* dove il pro-

---

gerò che questa costruzione è data anche dal PAPPO, che la attribuisce ad HERONE (cfr. PAPPI ALEXANDRINI *Mathematicae Collectiones*, Bologna, 1660, pagg. 9-10.

(1) *L'Algebra*, Opera di RAFAEL BOMBELLI da Bologna (Bologna, 1572) pag. 49.

(2) Mi riferisco alla dimostrazione che si legge nel citato articolo di A. CONTI, la quale non differisce da quella data dal prof. LORIA al loc. citato; la figura qui disegnata è la medesima che vien data dal CONTI, con le stesse lettere.

Digitized by Google

lungamento di DB incontra la circonferenza, e che perciò l'angolo $G\widehat{F}L$ è retto. Inoltre, per essere LA parallela ad GF, si deduce che anche l'angolo $A\widehat{L}F$ è retto.

I tre segmenti FG, FL, LA sono dunque sovrapposti ai tre regoli dello strumento di PLATONE (1), e la costruzione delle due medie proporzionali superiormente indicata viene meccanicamente eseguita dallo strumento di PLATONE.

ETTORE BORTOLOTTI

Sull'area del segmento circolare e su una regola empirica di Leon Battista Alberti

1. Nel XII dei suoi ludi matematici (2), l'ALBERTI trattando del modo di trovare la misura di campi di varia forma, considera anche un campo in forma di segmento circolare. E, rivolto al principe Meladusio d'Este, a cui sono dedicati i ludi, dice: « Pur se volessi averne qualche principio a comprendere le loro ragioni, convienvi dividere la corda in due parti e multiplicare l'una per l'altra. Verbigrazia sia la corda braccia 4, divisa in due ve ne vien due, e direte due via due fa quattro. Poi torrete la saetta quale si è uno, e composti e' due numeri insieme cioè uno e quattro faranno cinque. Partite questi cinque per mezzo, resterà due e mezzo. Levatene tutta la saetta, cioè uno, resterà uno e mezzo. Moltiplicate questo numero per la metà della corda che fa due, arete tutto el pieno di questa parte che sia tre ».

Se indichiamo con a la lunghezza della metà corda, con b quella della freccia, si ha, in tal modo, per l'area Δ del segmento circolare:

$$\Delta = \left(\frac{a^2 + b}{2} - b\right) \cdot a. \tag{1}$$

---

(1) Cfr. A. CONTI, loc. cit., pag. 356.

(2) SEB. TIMPANARO: *Leonardo*, pagine di scienza, vol. I, p. 21 (Edit. Mondadori, Milano) oppure: *Le opere volgari di L. B. Alberti*, pubblicate da ANICIO BONUCCI, vol. IV, Firenze, Tip. Galileiana, 1843-47.

Digitized by Google

Questa formula è evidentemente sbagliata, perchè non omogenea e di 3° grado nelle dimensioni lineari. La corrispondente regola probabilmente è derivata dagli agrimensori romani, che non guardavano tanto pel sottile, ed è stata trasmessa da trattatisti medioevali. Invero, poco dopo, lo stesso ALBERTI cita COLUMELLA per una regola atta a trovare la lunghezza dell'arco di corda $2a$ e freccia b, regola che può esprimersi con la formula:

$$l = 2(2a + b) + \frac{a^2}{14}, \tag{2}$$

ed è evidentemente sbagliata.

2. Con quale approssimazione la (1) ci dà l'area del segmento e in che differisce dalla formula esatta? ecco le domande che mi sono poste, domande a cui non è tanto facile rispondere, come potrebbe sembrare a prima vista, giacchè si tratta di un problema trascendente, come tutti quelli che concernono lunghezza di parti di circonferenza o area di parti di circolo.

I. **Metodo elementare.** — Quando a e b hanno particolari valori numerici, come nell'esempio riportato dall'ALBERTI, è facile trovare per via elementare un valore approssimato dell'area del segmento circolare.

Si comincia a determinare il raggio r del circolo in funzione di a e b, ricavando dal triangolo DBE (fig. 1) per un noto teorema sull'equivalenza:

$$a^2 = b(2r - b),$$

donde:

$$r = \frac{a^2 + b^2}{2b}. \tag{3}$$

L'angolo $\alpha = \widehat{DOB}$ si può ricavare da una delle relazioni:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{r} = \frac{2ab}{a^2+b^2}, \quad \cos\alpha = \frac{r-b}{r} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \quad \text{tang}\,\alpha = \frac{2ab}{a^2-b^2}. \tag{4}$$

Ciò posto l'area del settore OAB si calcola con la nota formula:

$$s = \frac{\pi r^2 \alpha}{180},$$

Digitized by Google

e se ne sottrae l'area del triangolo AOB. Si trova così:

$$(5) \qquad \Delta = \frac{\pi r^2 \alpha}{180} - \frac{a(a^2 - b^2)}{2b}.$$

Nel caso particolare $a = 2$, $b = 1$, si trova subito

$$\text{sen } \alpha = 0{,}8; \quad \alpha = 53°,7',48''$$

e però:

$$\text{settore } AOB = \frac{3{,}1416 \times 25 \times 191268''}{4 \times 648000''} = 5{,}7956;$$

$$\text{triangolo } AOB = a(r - b) = \frac{a(a^2 - b^2)}{2b} = 3;$$

$$\Delta = 2{,}7956 \text{ (con errore per eccesso } < 0{,}0001).$$

Poichè la regola empirica dell'ALBERTI dà 3 come area del segmento (n. 1), l'errore, per eccesso, che si commette seguendola, è non minore di

$$0{,}2044.$$

3. Metodi elementari per esaustione. - II. — Un altro facile procedimento per determinare l'area che ci interessa in funzione di a e b, consiste nel considerare il segmento come limite di una somma di triangoli rettangoli iscritti, (fig. 1):

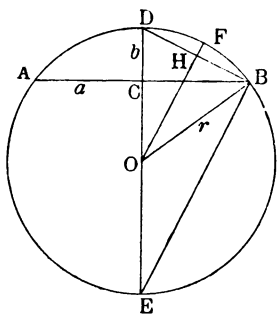


Fig. 1.

$$\Delta = 2(BCD + 2BFH + 4.... + ...),$$

metodo che per analogia con quelli usati dagli antichi, potrebbe dirsi di esaustione.

Per questa via, con applicazioni successive del teorema di PITAGORA e della regola per l'area del triangolo, trovasi:

$$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\overline{OH} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2 - b^2},$$

$$\overline{HF} = \frac{2r - \sqrt{4r^2 - a^2 - b^2}}{2},$$

. . . . . ,

Digitized by Google

$$\text{area } BDC = \frac{ab}{2},$$

$$\text{area } BFH = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{4} \times \frac{2r - \sqrt{4r^2 - a^2 - b^2}}{2} =$$

$$= \frac{1}{8}\{2r\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{4r^2(a^2+b^2) - (a^2+b^2)^2}\},$$

. . . . . .

onde risulta:

$$\Delta = ab + \frac{1}{2}\{2r\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{4r^2(a^2+b^2) - (a^2+b^2)^2}\} + \ldots.$$

Se ci fermiamo ai triangoli BFH, contentandoci di un'approssimazione molto grossolana, e poniamo per r il valore (3) si ha:

$$\Delta = ab + \frac{1}{2b}(a^2+b^2)[\sqrt{a^2+b^2} - a]. \tag{6}$$

Applicando questa formula all'esempio dell'ALBERTI ($a = 2$, $b = 1$), si trova

$$\Delta = 2{,}5902,$$

valore che differisce per difetto da quello sopra calcolato (n. 2) di 0,2054; ossia presso a poco tanto quanto il valore dato dall'ALBERTI ne differisce in più. E questo basta per mostrare che la regola empirica del n. 1 ci dà un'approssimazione molto grossolana.

Ma il metodo attuale, invece, consente un'approssimazione assai buona, solo che ci si spinga alla terza serie di triangoletti iscritti; poichè allora si trova:

$$\Delta = ab + \frac{(a^2+b^2)[\sqrt{a^2+b^2} - a]}{2b} + \tag{6'}$$

$$+ \frac{(a^2+b^2)\{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2+b^2 - a\sqrt{a^2+b^2})} - b\sqrt{a^2+b^2}\}}{2b^2}.$$

Per $a = 2$, $b = 1$, si ha di qui:

$$\Delta = 2 + \frac{5}{2}(\sqrt{5} - 2) + \frac{5}{2}(\sqrt{10(5 - 2\sqrt{5})} - \sqrt{5}) =$$

$$= 2 + 0{,}5902 + 0{,}1535 = 2{,}7437,$$

e se confrontiamo questo valore con quello trovato al n. 2, vediamo che ne differisce in meno per poco più di 0,05.

Digitized by Google

4. Poichè questo metodo presenta qualche analogia col primo dei metodi tenuti da ARCHIMEDE per calcolare l'area del segmento parabolico (1), è interessante confrontare il risultato trovato, con l'area del segmento parabolico di freccia b e corda base $2a$. Un tale segmento appartiene alla parabola di parametro $p = \frac{a^2}{2b}$ (come risulta ponendo $x = b$, $y = a$ nell'equazione della parabola riferita all'asse e alla tangente nel vertice) e quindi di equazione:

$$y^2 = \frac{a^2}{b} x.$$

La sua area, come risulta dal noto teorema di ARCHIMEDE, è $\frac{4}{3}$ del triangolo di base $2a$ e altezza b, ossia è:

$$\Delta_1 = \frac{4}{3} ab. \tag{7}$$

Il confronto di questa formula con la (6), che è complicatissima, non ci dice nulla d'interessante. Soltanto nel caso particolare che sia $b = \frac{a}{2}$, divenendo allora la (6′):

$$\Delta = \frac{a^2}{4}\left(5\sqrt{\frac{25}{2} - 5\sqrt{5}} - 3\right),$$

e la (7):

$$\Delta_1 = \frac{2}{3} a^2,$$

si trova:

$$\Delta - \Delta_1 = 0{,}0209 \ldots . a^2,$$

ossia si vede che il settore circolare supera il settore parabolico, di egual corda ed eguale freccia, di poco più che $\frac{2}{100}$ del quadrato della semicorda.

---

(1) Vedasi O. CHISINI: Aree, lunghezze e volumi (n. 14) in Questioni riguardanti le Matematiche elem. raccolte da F. ENRIQUES, III ediz., vol. II; o anche: E. RUFINI. Il « Metodo » di Archimede e le origini dell'Analisi infinit. nell'antichità; editore Stock, Roma, 1926.

Digitized by Google

5. La differenza così notevole fra la semplicità della (7) e la complicazione della (6′), pare che sia insita nella natura stessa dei due problemi. Invero, nella speranza di giungere a un risultato più semplice, in vece di considerare i triangoli rettangoli iscritti che si ottengono conducendo dal centro le perpendicolari, prima sulla corda dell'arco dato, poi sulle corde degli archi metà, e su quelle degli archi quarta parte del dato e così via, (fig. 1); ho voluto, per attenermi più strettamente al metodo archimedeo, considerare i triangoli che si ottengono per mezzo delle ordinate che passano per i punti che dividono la corda dell'arco in 2, 4, 8,... parti eguali (fig. 2).

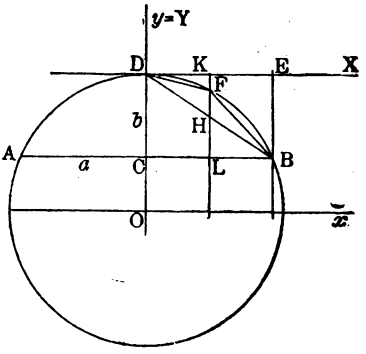


Fig. 2.

Ma, mentre per la parabola, per la proprietà caratteristica di avere le ordinate proporzionali ai quadrati delle ascisse, risulterebbe $KF = \frac{1}{4} EB$, e quindi

$$DHF + HFB = \frac{1}{4} DCB,$$

ciò che permette di stabilire subito la (7); nel caso del circolo, non si può sfruttare una proprietà analoga che conduca ad un risultato semplice. Invero, trasportando gli assi con l'origine in D, l'equazione del circolo:

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{7′}$$

diviene:

$$X^2 + (Y + r)^2 = r^2,$$

e di qui, per $X_1 = a$, si ha:

$$Y_1 = -r + \sqrt{r^2 - a^2},$$

e per $X_2 = \frac{a}{2}$:

$$Y_2 = -r + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Digitized by Google

Si vede che fra Y_1 e Y_2 non passa una relazione semplice come nel caso della parabola.

6. - III. — Per non lasciare intentato nessun mezzo di determinazione elementare dell'area che ci interessa, ho considerato anche il segmento come limite di poligoni ad esso circoscritti, e, trascurando il triangolo formato dalla corda AB

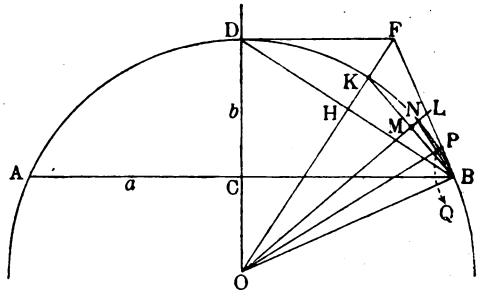


Fig. 3.

e dalle tangenti negli estremi, perchè di troppo discosto dal segmento stesso, ho preso in prima approssimazione (fig. 3):

$$\Delta' = ABD + 4BHF,$$

in seconda approssimazione:

$$\Delta'' = ABD + 4BHK + 8BML,$$

ed in terza:

$$\Delta''' = ABD + 4BHK + 8BMN + 16BPQ.$$

Con l'aiuto del teorema di PITAGORA si trova successivamente:

$$\overline{BH} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \overline{OH} = \frac{a}{2b}\sqrt{a^2 + b^2},$$

e poichè

$$BHF : BHO = \overline{BH}^2 : \overline{HO}^2,$$

e

$$BHO = \frac{a}{8b}(a^2 + b^2),$$

si trova

$$BHF = \frac{b}{8a}(a^2 + b^2),$$

Digitized by Google

onde in 1ª approssimazione:

$$\Delta' = ab + \frac{b}{2a}(a^2 + b^2).$$

Similmente si ottiene:

$$\overline{KH} = \frac{a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2}}{2b},$$

$$\overline{KB} = \frac{1}{2b}\sqrt{2(a^2 + b^2)^2 - 2a(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\overline{MB} = \frac{1}{4b}\sqrt{2(a^2 + b^2)^2 - 2a(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}(a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2})},$$

e quindi:

$$OMB = \frac{a^2 + b^2}{16b} \cdot \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$BHK = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{8b}(a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2}).$$

Poichè $MLB : OMB = \overline{MB}^2 : \overline{OM}^2$, si ricava:

$$MLB = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{16b^3} \times \{a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2}\}^2,$$

e perciò, in 2ª approssimazione:

$$\Delta'' = ab + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2b}(a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2}) + \\ + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2b^3}(a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2})^2.$$

Quest'ultima espressione mi ha fatto sperare di ottenere per questa via una progressione geometrica di ragione:

$$\frac{a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2}}{b^2} = 1 + \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}\right) < 1.$$

Ma tale speranza è stata amaramente delusa, quando, dopo molti calcoli noiosi che risparmio al lettore, ho trovato in

Digitized by Google

3ª approssimazione:

$$\Delta''' = ab + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b}(a^2+b^2 - a\sqrt{a^2+b^2}) +$$

$$+ \frac{a^2+b^2}{2b^2}(\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2+b^2 - a\sqrt{a^2+b^2})} - b\sqrt{a^2+b^2}) +$$

$$(8) \qquad + \frac{a^2+b^2}{b^2}\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{2} - \frac{a(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \times$$

$$\times \frac{a^2+b^2 - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}(a^2+b^2+a\sqrt{a^2+b^2})}}{a^2+b^2+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}(a^2+b^2+a\sqrt{a^2+b^2})}}.$$

Quest'ultima formula mi ha giovato tuttavia a trovare un buon valore approssimato per eccesso, nel caso particolare $a=2$, $b=1$, fornendomi:

$$\Delta = 2{,}8208\ldots.$$

Questo valore supera quello per eccesso trovato al n. 2 di 0,0252.

7. - IV. — Un *metodo*, che potrebbe chiamarsi *algebrico*, per determinare l'area del segmento circolare in funzione della corda e della freccia, potrebbe aversi sostituendo nella (5) per r e per α i valori ricavati dalla (3) e dall'ultima delle (4). Tale sostituzione ci dà infatti:

$$(9) \qquad \Delta = \frac{\pi(a^2+b^2)^2}{360\cdot 2b^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ab}{a^2-b^2} - \frac{a(a^2-b^2)}{2b}.$$

Ma la funzione trascendente $\operatorname{arc\,tg}\frac{2ab}{a^2-b^2}$, si può sviluppare in serie

$$\operatorname{arc\,tg} Z = Z - \frac{Z^3}{3} + \frac{Z^5}{5} - \frac{Z^7}{7} + \ldots.$$

soltanto se $|Z|<1$, cioè $\alpha < 45°$ (1), e ad ogni modo non conduce ad un risultato semplice.

---

(1) A. Capelli, *Lezioni di Algebra complementare*, 2ª ediz., pag. 309; Napoli, 1898.

Per $\alpha > 45°$, il segmento ABD può considerarsi come somma del triangolo ABD, e dei segmenti AD, BD per i quali $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{AOD} < 45°$.

Digitized by Google

8. Procedimenti integrativi. - V. metodo. — Ad un risultato analogo ci conduce il calcolo integrale. Se ci riferiamo ad assi ortogonali con l'origine in C, che rispetto agli assi aventi l'origine nel centro ha per coordinate $O, \frac{a^2-b^2}{2b}$, l'equazione del circolo diviene (fig. 1):

$$b(x^2+y^2)+(a^2-b^2)y=a^2b,$$

e da essa si ricava:

$$(10) \qquad y=\frac{b^2-a^2+\sqrt{(a^2-b^2)^2+4b^2(a^2-x^2)}}{2b}.$$

Si è tralasciato il segno — davanti al radicale perchè per $x=a$ deve risultare $y=0$ (vedi fig. 1), e ciò porta a concludere che il radicale deve essere positivo.

Ora si ha:

$$\Delta=2\int_0^a y\,dx=2\int_0^a\left(\frac{b^2-a^2}{2b}+\frac{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4b^2x^2}}{2b}\right)dx=$$

$$=2\left[\frac{b^2-a^2}{2b}\,x\right]_0^a+2\int_0^a\frac{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4b^2x^2}}{2b}\,dx=$$

$$=-\frac{a(a^2-b^2)}{b}+\frac{1}{b}\int_0^a\sqrt{(a^2+b^2)^2-4b^2x^2}\,dx.$$

E poichè [1]:

$$\int\sqrt{-4b^2x^2+(a^2+b^2)^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{-4b^2x^2+(a^2+b^2)^2}+$$

$$+\frac{(a^2+b^2)^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-4b^2x^2+(a^2+b^2)^2}}=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{-4b^2x^2+(a^2+b^2)^2}-\frac{(a^2+b^2)^2}{4b}\,\text{arc}\cdot\text{sen}\,\frac{-2bx}{a^2+b^2},$$

---

[1] Si può consultare un trattato di calcolo integrale, o anche un compendio come: P. CATTANEO, *Corso elementare di matem. superiori*; vol. 1°, *Analisi infinitesimale*, pag. 76, Bologna, Zanichelli.

Digitized by Google

si può scrivere:

$$\Delta = -\frac{a(a^2-b^2)}{b} + \frac{a}{2b}\sqrt{-4b^2a^2+(a^2+b^2)^2} + \\ + \frac{(a^2+b^2)^2}{4b^2}\,\text{arc}\cdot\text{sen}\,\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

ossia, riducendo:

$$(11) \qquad \Delta = -\frac{a(a^2-b^2)}{2b} + \frac{(a^2+b^2)^2}{4b^2}\,\text{arc}\cdot\text{sen}\,\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Questa formula a cui siamo arrivati con un'integrazione non troppo semplice, non è altro che la (5) nella quale ad r sia sostituito il valore dato dalla (3). Infatti se in (11) poniamo in luogo di $\text{arc sen}\,\frac{2ab}{a^2+b^2}$, la misura circolare ρ dell'arco, e poi trasformiamo questa nella misura sessagesimale con la nota proporzione:

$$\rho : \pi = \alpha : 180,$$

la (11) stessa diviene identica alla (5):

$$(11') \qquad \Delta = \frac{(a^2+b^2)^2}{4b^2}\cdot\frac{\pi\alpha}{180} - \frac{a(a^2-b^2)}{2b}.$$

Se poi vogliamo liberare la (11) dalla trascendente, bisogna ricorrere allo sviluppo:

$$\text{arc sen}\,Z = Z + \frac{1}{2}\cdot\frac{Z^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{Z^5}{5} + \ldots,$$

e si ottiene un risultato analogo — come si è già detto — a quello trovato al n. 7. Anche qui lo sviluppo non conduce ad un limite facilmente determinabile.

9. - VI. metodo. — Nè si è più fortunati ricorrendo a integrazioni dirette con la scomposizione del semi-segmento circolare in striscioline di eguale altezza e con la considerazione di rettangolini o di trapezî inscritti.

Infatti se (fig. 1) dividiamo $CB = a$ in n parti eguali, conduciamo le ordinate nei punti di divisione, e consideriamo

Digitized by Google

gli n rettangolini che hanno per base $\frac{a}{n}$ e per altezza l'ordinata iniziale, troviamo con la loro somma un valore approssimato per eccesso dell'area del mezzo segmento *DBC*, la quale risulterebbe poi espressa dal limite della somma stessa per $n = \infty$.

Le ordinate si ricavano dalla (10) per $x = 0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}$, e come somma delle aree dei detti rettangolini si trova così:

$$(12)\quad \frac{a}{2nb}\left\{(n+1)b^2-(n-1)a^2+\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{(a^2+b^2)^2-4b^2\left(\frac{ka}{n}\right)^2}\right\}.$$

L'espressione dell'area del segmento che così risulta, ponendo $\lambda = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, è:

$$\Delta = \frac{a}{2b}\lim_{n=\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)b^2-\left(1-\frac{1}{n}\right)a^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right\}=$$

$$(13)\quad =-\frac{a(a^2-b^2)}{2b}+\lim_{n=\infty}\frac{a}{2nb}\sum_{1}^{n-1}\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\left(\frac{k}{n}\right)^2}=$$

$$=-\frac{a(a^2-b^2)}{2b}+\frac{a(a^2+b^2)}{2b}\cdot\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\Sigma_k\left[1-\lambda^2\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ora se all'ultimo termine si applica lo sviluppo binomiale, e si ricordano le formule per le somme delle potenze simili dei primi $(n-1)$ numeri, si ha:

$$\frac{1}{n}\Sigma_k\left\{1-\lambda^2\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{n-1}{n}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\cdot\frac{\lambda^2}{2}-$$

$$-\frac{(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30n^5}\cdot\frac{\lambda^4}{8}-$$

$$-\frac{(n-1)n(2n-1)(3n^4-6n^3+3n+1)}{42n^7}\cdot\frac{\lambda^6}{16}-\ldots.$$

Ora per $n = \infty$ tutti i coefficienti dello sviluppo tendono a limiti determinati e finiti, dimodochè, essendo $\lambda < 1$, la

Digitized by Google

serie è convergente (1), ma il suo limite non è facilmente determinabile.

10. - VII. metodo. — Ad un risultato assai più semplice si perviene considerando l'area del mezzo segmento ACD come differenza fra l'area del quadrante e l'area della porzione di quadrante $ACOE$, che può calcolarsi con approssimazione per difetto come somma di trapezî in essa iscritti (fig. 4).

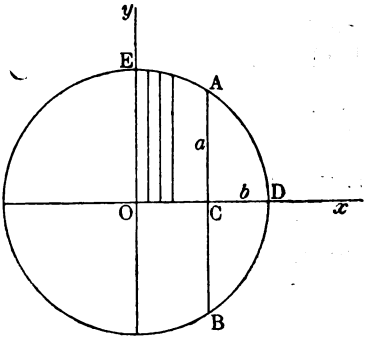


Fig. 4.

Riferendo il circolo ad assi ortogonali con l'origine nel centro, la sua equazione, per le (3), (7'), è:

$$x^2 + y^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4b^2},$$

e dividendo l'intervallo $OC = r - b = \frac{a^2 - b^2}{2b}$, per esempio in 10 parti eguali le ordinate degli estremi sono:

$$y_0 = \frac{a^2 + b^2}{2b}, \quad y_1 = \frac{1}{2b}\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{100}},$$

$$y_2 = \frac{1}{2b}\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - \frac{4(a^2 - b^2)^2}{100}}, \ldots,$$

$$y_9 = \frac{1}{2b}\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - \frac{81(a^2 - b^2)^2}{100}}, \quad y_{10} = a,$$

e perciò:

$$\text{area } OCAE = \frac{a^2 - b^2}{10 \cdot 2b} \cdot \frac{1}{2}\{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_9 + y_{10}\} =$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{20b}\left\{\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right\}.$$

Sostituendo alle ordinate le loro espressioni si trova:

$$\text{area } OCAE = \frac{a^2 - b^2}{20b}\left\{\frac{(a+b)^2}{4b} + \frac{1}{2b}\left[\sqrt{(a^2+b^2)^2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{100}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - \frac{4(a^2-b^2)^2}{100}} + \ldots + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - \frac{81(a^2-b^2)^2}{100}}\right]\right\},$$

(1) Per noti teoremi sulle serie. Vedasi CAPELLI, op. cit., pag. 78.

Digitized by Google

e perciò:

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{\pi(a^2+b^2)^2}{16b^2} - \frac{a^2-b^2}{20b}\left\{\frac{(a+b)^2}{4b} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2b}\left[\sqrt{(a^2+b^2)^2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{100}} + \ldots + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - \frac{81(a^2-b^2)^2}{100}}\right]\right\},$$

ossia:

$$\Delta = \frac{\pi(a^2+b^2)^2}{8b^2} - \frac{a^2-b^2}{20b^2}\left\{\frac{(a+b)^2}{2} + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{100}} + \right. \tag{14}$$
$$\left. + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - \frac{4(a^2-b^2)^2}{100}} + \ldots + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - \frac{81(a^2-b^2)^2}{100}}\right\}.$$

Ponendo in questa formula $a=2$, $b=1$, trovasi:

$$\Delta = \frac{3{,}1416 \times 25}{8} - \frac{3}{20}\left\{\frac{9}{2} + \sqrt{25 - \frac{9}{100}} + \sqrt{25 - \frac{36}{100}} + \right.$$
$$+ \sqrt{25 - \frac{81}{100}} + \sqrt{25 - \frac{144}{100}} + \sqrt{25 - \frac{225}{100}} + \sqrt{25 - \frac{324}{100}} +$$
$$\left. + \sqrt{25 - \frac{441}{100}} + \sqrt{25 - \frac{576}{100}} + \sqrt{25 - \frac{729}{100}}\right\}.$$

Calcolando le radici con 4 cifre decimali, ho trovato, effettuando i calcoli, il valore (per eccesso) 2,7985, il quale si approssima a quello calcolato al n. 2, più di ogni altro già trovato (nn. 3, 6) differendone solo per 0,0029.

La (14) si generalizza facilmente al caso della divisione di $OC = r - b$ in n parti uguali.

11. Concludendo si vede che non è facile trovare una formula che dia in modo esatto l'area di un segmento circolare in funzione della corda $2a$ e della freccia b. La formula esatta (5) contiene l'ampiezza α della metà dell'angolo al centro che comprende il segmento. Sostituendo α per mezzo di espressioni contenenti a e b si trovano formule con le trascendenti *arco seno* o *arco tangente* (nn. 7, 8), e ad una formula di questo tipo si giunge anche col calcolo integrale (n. 8). Altri metodi che si possono escogitare, sia che si tratti di procedimenti elementari (nn. 3, 6), sia che si tratti

Digitized by Google

di procedimenti integrativi (nn. 9, 10), conducono a sviluppi in serie, convergenti senza dubbio, ma dei quali non è facile nè vedere la legge di successione dei termini, nè trovare il limite.

Risultati semplici si hanno soltanto se la corda è un lato di poligono regolare iscritto, di un numero di lati non troppo elevato, e si vuole esprimere l'area in funzione del raggio. Ecco qualche esempio:

1° *Segmento limitato dal lato del triangolo equilatero:*

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r^2. \tag{15}$$

2° *Segmento limitato dal lato del quadrato:*

$$\Delta = \frac{\pi - 2}{4} \cdot r^2. \tag{16}$$

3° *Segmento limitato dal lato dell'esagono:*

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) r^2. \tag{17}$$

4° *Segmento limitato dal lato del pentagono:*

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}\right) r^2. \tag{18}$$

5° *Segmento limitato dal lato del decagono:*

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{10} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8}\right) r^2 \ (^1). \tag{19}$$

Chiavari, R. Istituto tecnico.

A. NATUCCI

---

(1) Per la determinazione grafica di aree di segmenti circolari, vedasi: C. ALASIA, *Calcolo grafico ed applicazioni alla statica grafica*, S. Lapi ed., Città di Castello, 1899, pag. 43.

Digitized by Google

Una questione di analisi indeterminata di 1° grado

Abbiasi l'equazione

$$ax + by = c,$$

ove a, b, c sono interi positivi, ed a e b primi fra loro, cioè $D(a, b) = 1$.

In molti trattati trovasi detto:

« Il numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione $ax + by = c$ è il quoziente di c per ab, o questo quoziente aumentato di 1 » (1).

Secondo questa regola, l'equazione

$$ax + by = ab$$

avrebbe una o due soluzioni in numeri interi positivi; invece ne ha nessuna. Infatti essa si può scrivere:

$$by = a(b - x).$$

Il primo membro è divisibile per b e il secondo non lo è, perchè b è primo con a, e non divide $b - x$ che è minore di b.

Si potrebbe correggere la regola enunciata parlando di soluzioni *positive o nulle* anzi che di soluzioni *positive*; ma allora questa regola diventa troppo restrittiva, perchè si ha il seguente

---

(1) Tale teorema si trova in BERTRAND: *Trattato di algebra elementare*, (Trad. Betti) Firenze 1912, pag. 209; ed in molti altri trattati.

Digitized by Google

Teorema. L'equazione $ax + by = c$ ha soluzioni intere positive o nulle se $c \geq (a-1)(b-1)$, mentre l'equazione

$$ax + by = ab - a - b$$

non ne ha.

In altre parole:

Se a, b sono numeri interi positivi, non nulli e tali che $D(a, b) = 1$, $(a-1)(b-1)$ è il più piccolo valore di c dal quale in poi l'equazione $ax + by = c$ ha *sempre* soluzioni intere positive o nulle.

Dim. La dimostrazione che si fa del primo teorema citato dice che se $c > ab$, l'equazione $ax + by = c$ ha soluzioni intere positive.

Pongo $x = x' + 1$ e $y = y' + 1$ ove x' e y' sono numeri interi positivi, compreso lo zero.

In oltre pongo: $c = ab + 1 + d$ ove sarà $d \geq 0$.

Sostituendo allora nell'equazione data ho:

$$a(x' + 1) + b(y' + 1) = ab + 1 + d$$

cioè:

$$ax' + by' = ab - a - b + 1 + d = (a-1)(b-1) + d;$$

e se prendo $d = 0$ risulta che $(a-1)(b-1)$ è il più piccolo valore di c dal quale in poi l'equazione $ax + by = c$ ha sempre soluzioni intere positive o nulle.

Esempio. Sia data l'equazione $3x + 8y = c$.

Per valori di $c \geq 14$, quell'equazione ha sempre soluzioni intere positive o nulle, mentre per $c = 1, 2, 4, 5, 7, 10, 13$ non ne ha.

Da alcuni autori, l'equazione $ax + by = c$ è chiamata equazione *diofantea*.

Volendo trovare un esempio che avesse un'importanza storica, lo cercai nelle Opere di Diofanto.

Vi trovai molte equazioni e notevoli sistemi, tra i quali quelli che permettono di trovare due numeri data:

la loro somma e la loro differenza,
la loro somma e il loro rapporto,
la loro differenza e il loro rapporto,
la loro somma (o la loro differenza) e il loro prodotto,

Digitized by Google

la loro somma (o la loro differenza) e la somma dei loro quadrati,

la loro somma e la somma dei loro cubi,

la loro differenza e la differenza dei loro cubi,

e molti altri problemi simili.

Trovai la formula, che è anche in EUCLIDE, e che dà la risoluzione in numeri interi dell'equazione $x^2 + y^2 = z^2$, cioè dà, in numeri interi, i tre lati di un triangolo rettangolo; ma non trovai nessuna equazione del tipo cercato (1).

Problemi di analisi indeterminata di 1° grado si trovano in BEDA il Venerabile, nato in Inghilterra, l'anno 671. Della sua opera, che comprende argomenti di filosofia, matematica, teologia, storia, ecc. se ne ha una edizione stampata a Colonia, in Germania, nel 1612 (2).

In essa si trovano i seguenti problemi:

1° Un mercante con 100 denari vuol comprare 100 animali. Sapendo che un bue costa 10 denari, un agnello 5 denari e che due lepri costano un denaro, trovare il numero dei buoi, degli agnelli e delle lepri comprate.

Si hanno le due equazioni:

$$x + y + z = 100, \quad 10x + 5y + 1/2z = 100,$$

da cui, eliminando z, si ha $19x + 9y = 100$, che è risolta da $x = 1$, $y = 9$, onde $z = 90$.

2° Venti monete sono distribuite a 20 persone: ogni uomo ne riceve 3, ogni donna 2, ed ogni due bambini ne hanno una. Quanti sono gli uomini, le donne e i bambini?

Si hanno le equazioni:

$$x + y + z = 20, \quad 3x + 2y + 1/2z = 20$$

ed eliminando z, si ha l'equazione:

$$5x + 3y = 20$$

che è risolta da $x = 1$, $y = 5$, onde $z = 14$.

---

(1) Lo stesso risultato è affermato in BALTZER: *Elementi di matematica*, 1886, parte III, pag. 93; e trovasi implicitamente nel « Formulario Matematico » del prof. PEANO, ove sono riprodotte le proposizioni di DIOFANTO.

(2) Vedi PIZZARDO: *Academia pro Interlingua*, anno 1926, pag. 44.

Digitized by Google

In LEONARDO PISANO (*Liber Abaci*, a. 1202, pag, 281) si trova il seguente problema:

Una contadina porta delle uova al mercato. Sa che contandole a 2 a 2 ne avanza 1, contandole a 3 a 3 ne avanza 1, a 4 a 4 ne avanza 1, a 5 a 5 ne avanza 1, a 6 a 6 ne avanza 1, a 7 a 7 ne ha un numero esatto.

Quante uova ha?

Se x è il numero delle uova, $x-1$ deve essere multiplo di 2, 3, 4, 5, 6, cioè deve avere la forma $60y$.

Inoltre deve essere $60y+1=7z$ cioè $7z-60y=1$, di cui la più piccola soluzione in numeri interi positivi è $y=5$, $z=41$, onde $x=301$.

Torino, R. Università.

CLEMENTINA FERRERO

Digitized by Google

Recensioni e Note bibliografiche

Delphos: The future of international language, by E. Sylvia Pankhurst. (Delfo: L'avvenire della lingua internazionale, di E. Silvia Pankhurst). Un vol. in 16 di 95 pagine della collezione di monografie «To-day and to-morrow» (L'oggi e il domani) 2 sh. 6 p. London, Kegan, Trench, Trubner & Co.

Questo elegante volumetto contiene esposte in forma breve e piacevole, tutte le notizie più interessanti sulle lingue internazionali, dai primi tentativi alle più recenti realizzazioni. Nel Cap. I dopo aver rilevato umoristicamente che l'uomo si distingue dagli altri animali sotto il rispetto internazionale, soltanto per non aver saputo creare un mezzo di comunicazione generale, l'Autore osserva come lo sviluppo dei commerci, i rapidi mezzi di intercomunicazione (aeroplano, telegrafo, telefono, radiotelefono) esigano un mezzo di comprensione internazionale, ossia una lingua ausiliare universale.

Nel Cap. II l'A. ricorda come, dal tempo dell'impero romano fino al sec. VII, il latino fosse lingua dei dotti, e in tale lingua Newton, Keplero, Copernico, Grazio, Harvey hanno esposto le proprie invenzioni. La reazione contro lo scolasticismo, le lotte di religione, il sorgere dei nazionalismi ha detronizzato il latino dal suo uso come lingua internazionale. Parlando dell'inizio dei linguaggi ausiliarî, l'A. ricorda le idee in proposito esposte da Descartes, Pascal, Leibniz ed altri; poi nel Cap. successivo (III), essa passa a distinguere le lingue internazionali in lingue *a priori* o posigrafie, fondate sulla classificazione delle idee, e in lingue *a posteriori* basate su vocabolario esistente, con grammatiche semplici e regolari. Le prime, di cui si fa la storia (Cap. III), sono poco pratiche per la mutevolezza delle classificazioni col progredir delle Scienze. Le seconde presentano molta ricchezza di tentativi e di studi, e la nota A. fa la storia di tali tentativi, non limitandosi solo ai principali (Volapük, Esperanto, Ido, Idiom

Digitized by Google

neutral, Interlingua ecc.) ma accennando anche ai meno noti (Cap. IV).

Nel Cap. V essa ricerca le condizioni cui deve soddisfare una lingua internazionale; è concorde nello scartare per tale uso per ovvie ragioni, le lingue nazionali, e dice che una tale lingua deve essere *a posteriori* con vocabolario internazionale, senza grammatica.

Analizzando le forme principali già proposte di interlingua, nel Cap. VI, l'A. osserva che l'*Interlingua* di Peano si avvicina più di ogni altra alle condizioni richieste. Ma anche il *Romanal* (Michaux), l'*Universal* (Molenaar), il *Medial* (Weisbart), l'*Occidental* di De Wahl, sono simili alla precedente, si basano sul vocabolario internazionale, in massima parte neolatino, e riducono la grammatica a ben poco. Si nota pertanto nei vari tentativi una convergenza verso uno scopo comune che fa prevedere prossimo il trionfo di una lingua internazionale.

Ad ogni modo (Cap. VII) una tale lingua non deve essere imposta da Governi, deve evolversi per consenso generale dell'opinione pubblica, sotto la direzione di specialisti. I Governi possono soltanto aiutare gli studî interlinguistici.

Tracciando infine un quadro ideale dell'umanità futura (Cap. VIII), l'A. spera che in avvenire l'umanità, non più tutta assorbita dalle cure materiali dell'esistenza, possa dedicare allo studio delle lettere e delle scienze maggior tempo che adesso. Allora i giornali conterranno una parte scritta nella lingua nazionale relativa alla letteratura e alle notizie interne, e una parte scritta in interlingua, relativa alla scienza e agli avvenimenti internazionali (1).

A. NATUCCI

---

(1) Alla stessa collezione appartengono altri volumetti interessanti, come: *Daedalus* o la Scienza dell'avvenire, di J. B. S. HALDANE; *Callinicus*, Una difesa dalla guerra chimica, dello stesso; *Icarus* o il Futuro della Scienza, di BERTRAND RUSSELL; *What I Believe* (che cosa io credo) del medesimo; *Tantalus* o il Futuro dell'uomo, di F. C. S. SCHILLER; *Hypatia* o la donna e il sapere, di Mrs. BERTRAND RUSSELL, ecc.

Digitized by Google

Varietà e Questioni proposte

Alcune considerazioni sul segno delle distanze in Geometria analitica.

1. In tutti i corsi di Geometria analitica, quando si tratta della distanza di un punto da una retta, si suol attribuire a questa un segno, ricorrendo a tale scopo a qualche convenzione. Ma non tutti gli Autori adoperano la medesima convenzione, e non ci pare che alcuno abbia creduto opportuno di soffermarsi ad approfondire tale questione; forse perchè l'argomento, del tutto elementare, sembra scevro da ogni interesse e difficoltà.

Ora, nel preparare le Lezioni di Geometria analitico-proiettiva, per gli studenti della Scuola di Ingegneria di Milano, mi si è presentata la necessità di un esame accurato della questione; e poichè le considerazioni incontrate non sembrano prive d'un qualche interesse didattico ho creduto opportuno dirne qualcosa in questo *Periodico*.

2. Prima di venire particolarmente al problema che ci interessa, conviene osservare che le *convenzioni* in matematica hanno sì molto dell'arbitrario, ma questo arbitrario è tuttavia subordinato ad alcuni principi fondamentali. Non sarebbe certo possibile enunciare questi principi, che dovrebbero costituire dei « canoni estetici per le costruzioni matematiche »; ma alcune norme però, quali ad esempio la semplicità e la uniformità delle convenzioni, sono comunemente riconosciute come opportune; ed altra norma, che a me sembra fondamentale, è quella di *salvare la continuità*.

3. Circa la distanza di un punto P da una retta r la convenzione più usuale è di assumere tale distanza col segno + o col segno — secondo che il punto P è, con l'origine degli assi, dalla stessa banda della r o da banda opposta (p. es. D'Ovidio, Bianchi, Berzolari).

Digitized by Google

Ma, come osserva il CASTELNUOVO, resta così indeterminato il segno della detta distanza quando r passi per l'origine; inoltre, se la retta si muove *con continuità* venendo ad attraversare l'origine, la distanza di P da r varia con una ***discontinuità*** in corrispondenza del passaggio di r per O.

Ora si immagini che il punto P e la retta r siano rigidamente collegati fra loro, e si faccia ruotare di 180° tale sistema intorno ad un punto H di r: la retta ritorna in sè stessa, riuscendone scambiati i due raggi che hanno l'origine in H, e il punto P va nel punto P', simmetrico di P rispetto ad r, che ha da r distanza uguale e contraria a quella di P; mentre nella rotazione eseguita la distanza stessa è rimasta costante.

Da ciò segue che non ha senso parlare di distanza (con segno) di un punto da una retta, ma si *deve* parlare di distanza da una retta *orientata*.

E a questo punto di vista si attiene il CASTELNUOVO.

4. Quando la retta sia data mediante un'equazione di forma normale

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

allora, essendo orientata la normale (i cui coseni direttori sono appunto $\cos\alpha$ e $\cos\beta$), la retta stessa viene orientata conseguentemente (ed è in un certo senso arbitrario orientarla verso la sinistra o verso la destra della normale).

Ma quando la retta è data mediante la sua equazione generale

$$ax + by + c = 0$$

come è possibile orientarla?

Non certo attraverso qualsiasi convenzione che si riferisca alla posizione della retta; imperocchè, come si è notato, mediante una rotazione di 180° che riporta la retta in sè stessa l'orientamento relativo viene invertito.

Per vedere a quale convenzione si sia naturalmente condotti, si consideri il fattore di normalità

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Questa è una funzione a due valori delle variabili indipendenti a e b, la cui linea di diramazione (nel piano i cui punti hanno le coordinate a e b) è data da

$$a^2 + b^2 = 0;$$

Digitized by Google

dunque finchè a e b variano *restando reali*, ρ non può mai cambiar segno, se durante detta variazione a e b non si annullino contemporaneamente, cioè ρ non cambia segno finchè la retta variabile

$$ax + by + c = 0$$

resta una retta propria del piano.

Si conclude che si può, *senza ledere il principio di continuità*, attribuire al fattore di normalità ρ un *segno arbitrario* (ed è naturale scegliere il segno positivo): allora ogni retta data dall'equazione

$$ax + by + c = 0$$

viene orientata secondo l'orientamento messo in luce dalla sua forma normale

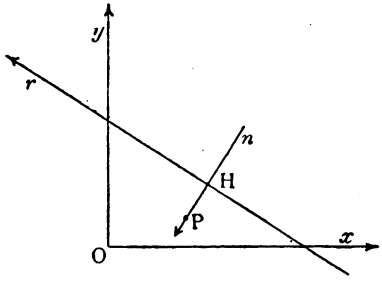
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0,$$

dove il radicale è inteso col segno positivo.

Con ciò: qualunque equazione di primo grado nelle variabili x e y rappresenta una retta orientata; i relativi coefficienti si possono moltiplicare per un qualunque numero *positivo* senza alterare la retta orientata; qualora invece si moltiplichino per un numero negativo, non cambia la retta bensì il relativo orientamento.

Questa distinzione di fattori positivi e negativi non è contraria alla continuità, giacchè *mai* si possono moltiplicare a, b, c per lo zero.

5. Resta una questione da risolvere: conviene orientare la retta r (vedi figura) verso la destra o verso la sinistra della normale n? e come distanza del punto P dalla retta r, si deve assumere il segmento PH o il segmento HP?



In conformità alle convenzioni sui segni delle aree (positiva un'area che si trova alla sinistra di chi ne percorra il contorno) è naturale assumere *positiva* la distanza di P quando si trovi alla sinistra della r; se la distanza sarà HP, la retta r appare orientata verso la destra della n (e la n verso la sinistra di r); se la distanza sarà invece PH, accadrà il contrario.

Ora a me sembra preferibile assumere come distanza di *P dalla retta r* il segmento HP che parte dal punto H di r e arriva a P, e

Digitized by Google

quindi orientare la retta r alla destra della normale, e la normale alla sinistra della r; il CASTELNUOVO invece adotta la convenzione contraria.

Secondo la convenzione che io propongo la distanza d'un punto x_0y_0 dalla retta

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + \delta = 0,$$

è data da

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + \delta,$$

mentre secondo la convenzione adottata dal CASTELNUOVO, a tale polinomio occorre cambiar segno. E se la retta è nella forma generale

$$ax + by + c = 0,$$

la distanza risulta

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ax_0 + by_0 + c).$$

6. La convenzione di assumere la retta

$$ax + by + c = 0$$

come orientata nel senso suddetto, dipendente dai coseni direttori della normale

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

si riconosce particolarmente conveniente appena si osservi che la retta determinata da due punti $A_1 = x_1y_1$ e $A_2 = (x_2y_2)$ *orientata da* A *verso* B, riesce appunto definita dalla solita equazione

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

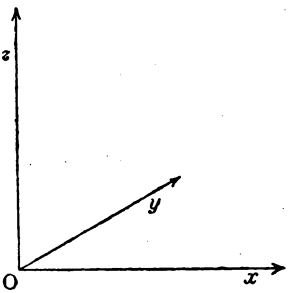
(cosa assai facile a riconoscersi in vari modi) e quindi l'area Δ del triangolo dato dai tre punti (x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3), senz'altro risulta anche in segno

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Le convenzioni relative alle rette del piano si estendono passando ai piani dello spazio; ma qui credo riesca opportuno qualche cenno ulteriore.

Digitized by Google

8. Si assumano (seguendo in ciò BORTOLOTTI e scostandosi da altri trattatisti) gli assi orientati come in figura, in modo che la parte positiva dell'asse z, si trovi dalla parte della pagina superiore del solito piano delle coordinate x e y.



9. Un piano nello spazio si dice *orientato* quando su esso è definito il senso di rotazione positivo.

10. Per un piano orientato la normale andrà (al solito) orientata in modo che le lancette di un orologio disposto col quadrante sul piano e rivolto verso il senso positivo della normale si muovano nel senso negativo.

11. Coseni direttori di un piano orientato sono i coseni degli angoli che la relativa normale (orientata) forma con gli assi (orientati).

12. La distanza HP di un punto P da un piano orientato π, avrà il segno che compete ad HP sulla normale.

13. Se un piano (orientato) ha i coseni direttori $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, e l'origine ha da esso la distanza δ, la sua equazione è

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + \delta = 0.$$

14. La distanza di un punto $(x_0\, y_0\, z_0)$ dal detto piano è

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma + \delta.$$

15. Quando di un piano

$$ax + by + cz + d = 0$$

importi l'orientamento, questo sarà assunto quale appare dalla equazione normale

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z + \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0,$$

cioè il *fattore di normalità* sarà sempre *positivo*.

Digitized by Google

16. La distanza di un punto $x_0 y_0 z_0$ da un piano orientato $ax + by + cz + d = 0$ è

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (ax_0 + by_0 + cz_0 + d).$$

17. Se Δ è un'area triangolare (o poligonale) appartenente a un piano orientato, essa è suscettibile di segno: avrà il segno + o il segno — secondo che il contorno è supposto percorso nel senso positivo o negativo delle rotazioni.

18. Se Δ e Δ' sono due aree appartenenti a due piani orientati π e π', le cui normali (orientate) faranno un certo angolo φ, e se è Δ' proiezione di Δ (e quindi il relativo contorno percorso nel senso che gli proviene dalla proiezione), è valido, anche per i segni, il solito teorema delle proiezioni

$$\Delta' = \Delta \cos \varphi.$$

19. Tre punti $A = (x_1 y_1 z_1)$, $B = (x_2 y_2 z_2)$, $C = (x_3 y_3 z_3)$ definiscono un piano π e il relativo orientamento, dato dal senso in cui, sul triangolo ABC, si susseguono i vertici A, B, C.

L'equazione di questo piano orientato è

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si riconosce infatti che i coefficienti di x, y, z in questa equazione sono (a meno del fattore 2) le aree dei triangoli proiezioni di ABC sui piani coordinati, e quindi valgono

$$\frac{1}{2}\Delta \cos \alpha, \quad \frac{1}{2}\Delta \cos \beta, \quad \frac{1}{2}\Delta \cos \gamma;$$

essendo Δ l'area del triangolo ABC, positiva, per l'assunto orientamento del piano π, risulta subito verificato l'asserto.

20. Dato un tetraedro $ABCD$, si darà ad esso volume positivo o negativo, secondo che il primo punto, A, ha distanza positiva (o negativa) del piano determinato dagli altri tre punti presi, dopo di esso, nell'ordine circolare BCD.

Digitized by Google

Il volume di un tetraedro $ABCD$ è, anche in segno, dato da $\frac{1}{6}$ del determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

(nelle successive linee figurano le coordinate dei punti $ABCD$).

21. Crediamo opportuno terminare queste semplici considerazioni sui segni delle distanze, richiamando nuovamente [1] l'attenzione sull'opportunità di considerare, nel sistema delle coordinate polari, anche *raggi vettori negativi*; il che risulta *necessario se si vuol* conservare la continuità.

E basti il semplice esempio delle coordinate polari ρ e θ di un punto P che, muovendosi con continuità, descriva un cerchio passante per l'origine O del detto sistema.

O. CHISINI

Questioni proposte.

148. Dimostrare l'identità:

$$\frac{2n(2n+3)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}^2 = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{(n-h)(n-h+1)}\binom{4n-2h+2}{2n-h+1}\binom{2h}{h}$$

G. VIVANTI

149. Di tutti gli esagoni iscritti in una ellisse, trovare quello di area massima.

M. M.

150. Studiare le condizioni perchè due poligoni rettilinei equivalenti possano ottenersi come differenze di poligoni uguali.

F. E.

151. Si immagini una *roulette* costituita da una calamita orizzontale, mobile, *con piccolo attrito*, intorno ad un asse verticale

---

[1] Cfr. G. LORIA: *Osservazioni sopra le coordinate polari*, « Periodico di Matematica », 1899.

Digitized by Google

passante per il suo centro di gravità (appartenente alla linea neutra della calamita). Il polo nord di detta calamita serva da indice rispetto a un sottostante cerchio graduato diviso in un certo numero n di parti uguali.

Se in queste condizioni si imprime un movimento di rotazione, *molto forte*, alla detta calamita, la probabilità che essa si fermi in corrispondenza ad una qualunque delle n divisioni può considerarsi $\frac{1}{n}$. Si avvicini ora (col polo sud) una seconda calamita, in modo da generare un campo magnetico, *non* però così *intenso* da poter spostare la primitiva calamita da una sua qualunque posizione di fermata: si chiede ora quale sarà la probabilità perchè la calamita mobile si fermi in corrispondenza ad una data divisione, e in particolare in quella relativa alla posizione occupata dal polo sud della seconda calamita.

O. C.

152. Trovare il limite della successione $a_1, a_2, a_3 \ldots$ sapendo che ogni suo elemento, a partire dal terzo, è la media aritmetica (o geometrica o armonica) dei due precedenti.

P. CATTANEO

Risposte.

Risposta alla questione n. 138.

I lati di un angolo retto che ruota intorno al punto (0, 0) *della curva* $x^3 - ay^2 = 0$ *tagliano la curva nei punti* P *e* Q. *Determinare l'inviluppo della retta* PQ.

Le rette

$$y = mx, \quad y = m'x$$

incontrano la curva data oltre che due volte nell'origine, ulteriormente nei punti

$$P(am^2;\ am^3), \quad Q(am'^2;\ am'^3).$$

La retta PQ di equazione

$$\frac{x - am^2}{am^2 - am'^2} = \frac{y - am^3}{am^3 - am'^3}$$

ha le coordinate plukeriane

$$(1) \qquad u = \frac{m^2 + mm' + m'^2}{-am^2m'^2}, \quad v = \frac{m + m'}{am^2m'^2}$$

Digitized by Google

Se le due rette considerate sono ortogonali è

$$1 + mm' = 0.$$

L'eliminazione di m, m' fra questa e le (1) dà l'equazione dell'inviluppo cercato

$$au + a^2v^2 + 1 = 0$$

la cui equazione cartesiana è

$$4x^2 - y^2 - 4ax = 0;$$

essa rappresenta una iperbole col centro nel punto $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$; i suoi assintoti sono $y = \pm 2\left(x - \frac{a}{2}\right)$; l'asse trasverso coincide coll'asse delle x, i suoi vertici sono i punti $(0; 0)$ $(a; 0)$.

Questa risposta è dovuta a G. Gobesso. Altre, in cui si fa ricorso ai procedimenti generali per determinare gli inviluppi (derivazione rispetto al parametro che figura nell'equazione della curva variabile di cui si cerca l'inviluppo) ci pervennero dai proff. F. Antonini, A. Barzaghi e M. Morini.

Risposta alla questione n. 139.

Fissato un numero naturale α, si consideri l'aggregato degli infiniti punti

$$x = \operatorname{sen} \frac{2\pi n^2}{\alpha n + 1}$$

per n ***intero e positivo.***

Trovare l'aggregato derivato di questo insieme (cioè l'insieme dei punti limiti dell'aggregato precedente).

Sia G l'insieme dei punti

$$x = \operatorname{sen} \frac{2\pi n^2}{\alpha n + 1} = \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{n}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)} \right)$$

per n intero e positivo.

L'insieme derivato G', per un valore determinato razionale di α, coincide con l'insieme G_1 dei punti

$$x = \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{n}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right). \tag{1}$$

Se α è un numero naturale l'insieme G_1 risulta degli α punti che si hanno da (1) per $n \leq \alpha$.

Questa risposta, è dovuta al prof. A. Barzaghi, altra ci pervenne dal prof. C. Rovetti.

Digitized by Google

Risposta alla Questione n. 140.

Sia data una successione qualunque dei segni + e —. Dimostrare che si può determinare, in modo unico, un numero x (compreso tra 0 e 2π) tale che sen $2^n x$ abbia il segno dell' ennesimo termine della successione predetta.

Si consideri il segmento di estremi 0 e 2π, e si divida questo per metà, avendosi i due segmenti, diciamo a_0 e b_0, il primo di estremi 0 e π, l'altro di estremi π e 2π.

La conoscenza del segno di sen $2^0 x$, definisce quale dei due segmenti a_0 e b_0, deve contenere x, precisamente il primo se sen $2^0 x$ deve essere positivo, il secondo se sen $2^0 x$ deve essere negativo. Chiamiamo s_0 quello dei due segmenti suddetti che corrisponde al segno dato. Dividiamo s_0 in due parti uguali, diciamo a_1 e b_1 (a_1 alla sinistra di b_1). Per x appartenente ad a_1 sen $2^1 x$ è positivo, e invece per x appartenente a b_1 sen $2^1 x$ è negativo. Quindi la conoscenza del segno di sen $2^1 x$ definisce a quale dei due segmenti a_1 o b_1 appartiene x. Indicato con s_1 quello dei due segmenti cui corrisponde il segno dato, lo si divida in due segmenti uguali a_2 e b_2 (a_2 alla sinistra di b_2). Secondo che x appartiene ad a_2 o a b_2, sen $2^2 x$ avrà segno + o —, e quindi la conoscenza di questo segno determina uno di questi segmenti, che chiameremo s_2.

Così proseguendo avremo la successione di segmenti $s_0, s_1, s_2 \ldots$, ciascuno metà del precedente. Esiste allora un unico punto x interno a tutti questi segmenti, ed è ovvio, per il modo con cui essi sono stati scelti, che sen $2^n x$ ha appunto il segno ennesimo (per semplicità di notazione si considera il primo segno dato come di posto zero).

Questa soluzione appartiene al prof. M. Morini; altra, analoga, ci pervenne dal prof. A. Barzaghi.

Risposta alla questione n. 141.

Sia* ABC *un triangolo,* Γ *il suo circolo circoscritto. Si lascino fissi* A *e* B *e si faccia variare* C *su* Γ. *Quale luogo descrive il centro del cerchio inscritto? Quale inviluppo l'asse radicale di* Γ *e del cerchio inscritto?

Sia $ACB = \alpha$. Mentre C descrive Γ, il centro della circonferenza descritta descrive i due archi di circolo, interni a Γ, cogli estremi in A e B, capaci dei due angoli $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ e $\pi - \frac{\alpha}{2}$. I centri di questi due circoli sono l'intersezione di Γ con l'asse di AB.

Digitized by Google

L'equazione del luogo cercato è

$$\begin{cases} X = 2R \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \varphi \\ Y = 2R \operatorname{sen} \alpha_1 (\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \alpha_1) \end{cases}$$

per φ variabile fra α_1 e $\pi - \alpha_1$, dove α_1 assume rispettivamente per i due archi i valori di $\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}$, e dove $(\pm R \operatorname{sen} \alpha, 0)$ sono le coordinate di A e B.

Dall'equazione di Γ

$$x^2 + y^2 - 2R \cos \alpha y - R^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 0$$

e da quella del circolo inscritto

$$x^2 + y^2 - 2Xx - 2Yy + X^2 = 0$$

si deduce il sistema che definisce l'inviluppo cercato

$$\begin{cases} 2Xx + 2(Y - R \cos \alpha) y - (X^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \\ x - y \operatorname{cotg} \varphi - X = 0 \end{cases}$$

da cui si ha l'equazione parametrica

$$x = 2R \operatorname{sen} \alpha_1 (1 + A(\varphi)) \cdot \cos \varphi$$
$$y = 2R \operatorname{sen} \alpha_1 A(\varphi) \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

dove si è posto

$$A(\varphi) = \operatorname{sen} \alpha_1 \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \alpha_1}{2 \operatorname{sen} \alpha_1 - \operatorname{sen} \varphi (\cos \alpha + 2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1)} .$$

Questa risposta, unica pervenutaci, è dovuta al prof. A. BARZAGHI.

Risposta alla questione n. 142.

Per un noto Teorema, dimostrato la prima volta da GALILEO, *sappiamo che un grave il quale cada lungo la corda* BA *di un cerchio verticale, al punto più basso* A, *impiega il medesimo tempo qualunque sia la corda. Ossia tutte le corde condotte dal punto inferiore* A *sono* tautocrone *rispetto alla discesa di un grave, e il tempo di questa discesa è quello stesso della caduta lungo il diametro verticale.*

Abbiamo dunque

$$2r = \frac{1}{2} g t^2$$

Digitized by Google

da cui

$$[1] \qquad t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Se invece il grave discende lungo l'arco BA *esso si muove come un pendolo semplice di lunghezza eguale al raggio* r *del cerchio, e il tempo* t, *della discesa, corrispondente a mezza oscillazione semplice, è dato* approssimativamente *da*

$$[2] \qquad t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

L'eguaglianza [2] *è tanto più esatta quanto più piccolo è l'arco, e il valore di* t_1 *dato da essa è il valore vero, al limite, per un arco piccolissimo. Ma se l'arco* BA *diventa piccolissimo, esso si confonde geometricamente con la sua corda: e quindi* sembra legittimo *ammettere che la caduta lungo un arco piccolissimo o lungo la sua corda, debbano compiersi in tempi eguali. Questa conclusione che sembra così logica, è invece falsa, perchè se facciamo* $t = t_1$ *troviamo* $\pi = 4$. *Ossia, il rapporto fra i tempi di caduta per l'arco e per la corda, coll'impiccolire dell'arco tende non ad* 1 *ma a* $\frac{\pi}{4}$.

Dove sta la causa dell'errore?

L'errore si può far consistere nell'attribuire al punto grave, con velocità iniziale nulla, un movimento sul segmento infinitesimale a cui tendono insieme la corda e l'arco del supposto cerchio verticale, con estremo comune nel punto più basso del cerchio: segmento rettilineo orizzontale, come avente la direzione della tangente al cerchio in detto punto più basso, sul quale il movimento del punto grave non può essere altrimenti che nullo.

Questa risposta è dovuta al prof. G. A. M. Altre ci pervennero dai proff. A. Barzaghi, G. Gobesso, M. Morini, C. Rovetti e dall'ing. G. Ivaldi.

Risposta alla questione n. 143.

Da un treno che passa davanti a me con la velocità v, *un viaggiatore lascia cadere una pietra. Questa ha quindi una velocità* v, *orizzontale, nella direzione del treno, e l'energia cinetica* $E = \frac{mv^2}{2}$; *e descrive la sua traiettoria parabolica, come se fosse stata lanciata sulla strada con quella velocità.*

Se invece il viaggiatore, dal finestrino, lancia la sua pietra, orizzontalmente, nella direzione del treno, imprimendole rispetto al treno una velocità v, *la pietra ha, rispetto a me e alla strada, la velo-*

Digitized by Google

cità 2v *e quindi l'energia cinetica*

$$4\frac{mv^2}{2} = 4E.$$

Ma il viaggiatore, lanciando la pietra dal treno in corsa, ha fatto lo stesso lavoro, come se il treno fosse fermo; e l'energia impiegata deve essere la medesima, cioè quella corrispondente all'energia da lui comunicata alla pietra, ossia

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

E la pietra, finchè era nelle sue mani, avendo la velocità v *del treno, possedeva soltanto l'energia*

$$\frac{mv^2}{2} = E.$$

Sembrerebbe dunque che l'energia cinetica della pietra dovesse essere semplicemente raddoppiata, cioè essere 2E; *e invece è* 4E.

Donde proviene l'eccesso di energia 2E *che la pietra ha acquistato?*

Si trova il medesimo risultato con ambedue i riferimenti, alla linea ferroviaria e al treno, in movimento traslatorio, rettilineo, uniforme, orizzontale, tenendo conto che, se s rappresenta la grandezza dello spostamento orizzontale, rispetto alla linea, del punto d'applicazione della forza applicata alla pietra, col risultato di determinarvi l'aumento di velocità orizzontale di grandezza v (egualmente rispetto alla linea come rispetto al treno), sarà s' la grandezza dello spostamento omologo dello stesso punto, rispetto al treno, con

(1) $$s' = s - vt,$$

indicando con t il tempo che appartiene al movimento del treno, durante il suddetto spostamento, di grandezza s, rispetto alla linea, del punto d'applicazione della forza. Invece la forza resta la stessa con ambedue i riferimenti, perchè sono nulle le forze di CORIOLIS. Indichiamone la grandezza (intesa, per semplicità di discorso, costante) con F. Con riferimento al treno, il teorema della forza viva fornisce

(2) $$\frac{mv^2}{2} = Fs' = F(s - vt),$$

donde

(3) $$\frac{mv^2}{2} + Ftv = Fs.$$

Digitized by Google

Ma, nel teorema della quantità di moto,

$$Ft = m(2v) - mv = mv.$$

Quindi la (3) diventa

$$3\frac{mv^2}{2} = \frac{m(2v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = Fs,$$

lo stesso risultato che fornisce direttamente il riferimento alla linea ferroviaria.

Tale soluzione è dovuta al prof. G. A. M. Altra di natura intuitiva è la seguente dovuta al prof. A. BARZAGHI.

Sia $Fs = E$ il lavoro del viaggiatore. Il moto del treno aumenta lo spostamento s_1 relativo alla strada e quindi aumenta l'energia cinetica comunicata alla pietra.

Se

$$s = \frac{v}{2}t, \quad \text{si ha} \quad s_1 = \left(v + \frac{v}{2}\right)t = 3 \cdot s.$$

L'eccesso di energia $2E$ proviene adunque dall'energia del treno ceduta per reazione.

Altre soluzioni ci pervennero da C. ROVETTI, B. GULOTTA e dall'ing. G. IVALDI.

Risposta alla questione n. 145.

Costruire un rettangolo di area data, i cui lati stiano in un rapporto dato. Costruire un rettangolo dati il rapporto dei lati e la differenza dei loro quadrati. Illustrare i due problemi e le loro relazioni con la geometria analitica.

Le misure dei lati dei due rettangoli soddisfacenti rispettivamente ai sistemi

$$\begin{cases} xy = a \\ y = mx \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a_1 \\ y = m_1 x \end{cases}$$

sono, nell'ipotesi di assi ortogonali, le coordinate dei punti intersezione di una retta per l'origine con una iperbole equilatera, i cui asintoti coincidono nel primo caso con gli assi coordinati e nel secondo caso con le bisettrici degli angoli di questi.

Condizione necessaria e sufficiente per la realtà della soluzione positiva è rispettivamente $m > 0$ e $0 < m_1 < 1$; e supponendo $a_1 = 2a$, $m_1 = \frac{m-1}{1+m}$, le soluzioni $(x_0 y_0)$ e $(x_1 y_1)$ dei due pro-

Digitized by Google

blemi soddisfano al sistema di trasformazione

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + y_0) \qquad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_0 + y_0).$$

Senza iperbole si ottengono i lati dei due rettangoli costruendo per es. per ciascuno dei due problemi un triangolo rettangolo $A'B'C'$ simile di ABC, in modo che nel primo caso si abbia $AC=1$, $CB=m$, $A'C'=\sqrt{\frac{a}{m}}$, e nel secondo caso $AB=1$, $CB=m_1$, $A'C'=\sqrt{a_1}$. Le soluzioni del primo problema sono date dai cateti $A'C'$ e $C'B'$; quelle del secondo dall'ipotenusa $A'B'$ e dal cateto $C'B'$.

Il triangolo $A'B'C'$ è identico nei due problemi se $a_1=\frac{a}{m}$, $m_1=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$.

Questa soluzione è dovuta, anche nella sua forma, al prof. A. BARZAGHI; altre, non sostanzialmente diverse, ci pervennero dai proff. E. CATERINO e V. ARCIDIACONO (1).

Notizie.

Il X Congresso geografico italiano, si svolgerà, auspice il Touring Club, in Milano dal 6 al 15 del prossimo settembre. Le adunanze si terranno nelle aule della Università Commerciale Bocconi. Cinque mostre costituiranno efficace commento al convegno: la raccolta di stampe « L'Italia geografica » composta da Achille Bertarelli, esposta nella Biblioteca del Castello Sforzesco; una raccolta di antiche carte geografiche, nelle sale dell'Ambrosiana; la mostra della moderna produzione geografica italiana; la mostra fotografica del paesaggio italiano; la mostra geografica dell'espansione italiana all'estero.

Tre escursioni di cui una a Como e al suo lago, completeranno la importante adunata.

Coloro che desiderino partecipare al Congresso, possono chiedere il relativo bando al Comitato ordinatore presso il Touring Club Italiano, Corso Italia 10, Milano.

(1) *Per mancanza di spazio rimandiamo al prossimo fascicolo le altre soluzioni ricevute.*

Digitized by Google

Atti della Società Italiana di Scienze fisiche e matematiche « Mathesis »

ATTI DEL CONSIGLIO DIRETTIVO

Il prof. ENRICO PERSICO, in seguito alla sua nomina a professore di Fisica Teorica all'Università di Firenze, si è dimesso da membro del Consiglio Direttivo. Il Consiglio, accettando le dimissioni, ha espresso al Collega i più vivi ringraziamenti per il contributo da lui dato ai lavori del Consiglio stesso.

Congresso della Società " Mathesis "

Il Consiglio Direttivo, accogliendo l'invito della Società Italiana per il progresso delle Scienze, ha deliberato di tenere il Congresso della « Mathesis » a *Perugia* nella settimana in cui avrà luogo quello dell'anzidetto Sodalizio.

La prima seduta avrà luogo il giorno 7 ottobre alle ore 10.

Il Congresso si tiene nei locali adibiti al Congresso della Società Italiana per il progresso delle Scienze, il cui Comitato ordinatore ha per Presidente il prof. SERGIO PANUNZIO, Rettore dell'Università di Perugia e per Segretario il prof. OSVALDO POLIMANTI della stessa Università, ai quali occorre rivolgersi per eventuali schiarimenti.

ELEZIONI SUPPLETIVE
di un Membro del Consiglio Direttivo della " Mathesis „.

Verbale di scrutinio.

Il giorno 1 luglio 1927 i soci prof. F. Enriques, prof. T. Levi-Civita e dott. M. T. Zapelloni hanno proceduto allo spoglio delle schede pervenute alla Presidenza per l'elezione di un Membro del

Digitized by Google

Consiglio direttivo, in sostituzione del prof. E. Persico, dimissionario (categoria *f*).

La votazione ha avuto il seguente risultato:

Votanti 213. Schede nulle 6 (una non ricevuta perchè tassata, una, proveniente da Padova, perchè priva del nome del mittente, e quattro perchè prive della bustina interna).

Risultò *eletto il prof. Luigi Amoroso*, con voti 203.

Ebbero un voto i proff.: Carnera Luigi, Garbasso Antonio, Timpanaro Sebastiano, Volterra Vito.

fir.ti: F. ENRIQUES
T. LEVI-CIVITA
M. T. ZAPELLONI

Hanno votato i seguenti soci: Abbati N., Addis A., Agostini A., Aliprandi G., Amaldi I., Amaldi U., Ambrosoli C., Angeli L. R., Angiolini Magnaghi A., Ballarin F., Bandiera A., Barberi G., Bardone M., Bassi P., Bedarida M., Benedetti P., Beani L., Bertini E., Berzolari L., Bettazzi R., Boaga G., Boccardini G., Borio A., Bortolotti Enea, Bortolotti Ettore, Bottari A., Bozzuto G., Bruera S., Brunè C., Brusotti L., Butti T., Calvi A., Campedelli L., Candido G., Cappelletti G., Caracappa A., Carozzi A., Casa M., Casazza M., Caselli V., Castaldo P., Castelli P., Caterino E., Cavallaro V., Ceccherini F., Ceretti W., Certo L., Checchetti G., Chini G., Chisini O., Chittaro G., Ciani E., Cipolla M., Cisotti U., Civinini L., Colucci V., Composto S., Concina U., Conforto R., Conte T., Cordero E., Curti P., Dall'Acqua F. A., Della Casa L., Del Pezzo P., Del Re M., De Nunzio L., De Narda M., De Zuani A., Di Dia G., Di Franco A. Donetti A., Doria G., D'Ovidio E., Dusi T., Enriques F., Esperti V., Faggioli V., Fano G., Fea S., Ferrari M., Ferrario G., Fiorentini P., Florio S., Gabba L., Galleno P., Gallucci G., Galvani L., Garibaldi C., Garzillo A., Gianfelici B., Gigli D., Gonella G. B., Graffi A., Grassi E., Guerra E., Gulotta I., Ingrassia M., Josti M., La Barbera A., La Greca L., Lampariello G., Lauro G., Lazzeri G., Levi B., Levi-Civita T., Licini A., Lolivo F., Lorenzola P., Lucarelli M., Lucifora G., Manarini M., Masetti M., Marcolongo R., Marini D., Martines M., Martini F., Marussig A., Mastromauro V., Matone G., Mazzeri M. G., Mercogliano D., Meschia G., Mezzacapo D., Minoti G., Monti G., Morra G., Nanni M., Narciso R., Natucci A., Neppi Modona A., Neri G., Nicoletti O., Nigro G., Oseletto Alemanni T., Palazzo E., Palermo D., Palermo L., Pardini M., Pascal N., Pastori M., Penna P., Pepoli A., Perez F., Perna A., Persico E., Pession B., Picotti M., Piersantelli G., Pincherle S., Piva A., Piva U., Pomini O., Pontremoli A., Predella P., Previatti M., Quintili P., Raimondi E.,

Digitized by Google

Ramorino A., Raseri L., Ravotto V., Reale G., Regatti R., Repetto G., Rimini C., Ripamonti M., Rodotà C., Rosati C., Rossetti E., Rossi C., Rossi E., Ruggeri C., Salinati C., Saltini M., Sandri A., Sannia G., Sartori A., Sansone G., Scarpa C., Serosoppi P., Siciliano A., Silvestri M., Simonotti L., Soldati S., Solustri A., Stanghellini U., Supino G., Susani A., Tagliarini R., Talamo L., Tata G., Tavani M., Tenussi S., Timpanaro S., Tocchi L., Togliatti E., Tonelli F., Tonini E., Toscano L., Tizzani E., Traverso N., Vallauri E., Vannini T., Vecchi M., Ventriglia M., Villani G., Vivanti G., Wittes M., Zapelloni M. T., Zavertani A., Ziliani C.

VERBALI DELLE SEZIONI

SEZIONE GENOVESE

Adunanza del 5 maggio 1927.

La Sezione si è riunita alle ore 17 in un'aula del R. Istituto Tecnico, gentilmente concessa, per trattare il seguente o. d. g.:

R. Parodi, Un nuovo strumento ottico;

G. Burnengo, Il metodo cartesiano nell'insegnamento medio.

Sono presenti i soci: Loria, presidente; Bedarida, Beggi, Bernini Arcero, Burnengo, Casali, Casazza, Clarke, Gonella, Grassi, Guareschi, Lamberti, Marcellino, Nannei, Padoa, Parodi, Piersantelli, Rollo, Rosa, Rossi, Segrè, Sittignani, Tacchella, Togliatti, Zani.

È letto ed approvato il verbale della seduta precedente.

Il presidente dà la parola al prof. Parodi il quale, giovandosi di diverse tavole contenenti precisi disegni schematici, espone con chiarezza ed evidenza il funzionamento di un nuovo apparecchio ottico a visione panoramica, da lui stesso immaginato e realizzato.

Dopo aver osservato che sia le lenti quanto le ordinarie superficie riflettenti, ed in genere gli apparecchi ottici conosciuti, abbracciano campi d'efficace azione o di visibilità, la cui estensione angolare in ogni senso non può oltrepassare i 60°; l'oratore fa presente di essere riuscito mediante l'impiego di apposite lenti ad estendere la visibilità (in un senso determinato, per es. orizzontale) al massimo assoluto di 360°.

Richiamata la nota proprietà dell'iperbole, secondo la quale i raggi diretti esternamente verso un fuoco della curva, supposto

Digitized by Google

che incontrando quest'ultima ne siano riflessi, concorrono tutti nell'altro fuoco dell'iperbole, dimostra il funzionamento della lente caratteristica del suo apparecchio, la cui forma ricordando quella del solido di rivoluzione detta *toro*, viene per analogia detta *torica*.

Tale lente incavata internamente alla guisa della superficie di un iperboloide di rivoluzione e resa dal lato interno riflettente mediante opportuna argentatura, è limitata esternamente da due superficie sferiche, aventi rispettivamente i centri nei due fuochi dell'iperboloide.

Sotto questa lente obbiettiva, che si vorrà supporre esposta ad es. in mezzo ad un paesaggio, lungo l'asse ottico dello strumento sono collocate diverse lenti ordinarie ed infine una lente torica identica alla obbiettiva, ma disposta in senso inverso. Il tutto fornisce una imagine panoramica completa del campo abbracciato dalla lente obbiettiva sopra uno schermo cilindrico disposto attorno alla base dello strumento.

Il prof. Parodi fa infine notare ai presenti che la soluzione del quesito d'ottica geometrica trattata, potrà avere anche svariate applicazioni nel campo della pratica.

La fine della interessante comunicazione è accolta con applausi dai presenti. Il prof. Loria dopo avere ringraziato l'oratore gli domanda se lo strumento di cui egli ha parlato è già costruito; chè, in tal caso, sarebbe cosa gradita ai soci poterlo esaminare. Il prof. Parodi risponde che si stanno costruendo esemplari dell'apparecchio sufficientemente maneggevoli.

Prende poi la parola il prof. Burnengo il quale espone la sua comunicazione sopra « Il metodo cartesiano nell'insegnamento medio » rilevando l'opportunità di introdurre nell'insegnamento medio di 2° grado i primi elementi della rappresentazione cartesiana e la rappresentazione grafica delle funzioni razionali intere dei primi tre gradi, allo scopo di farne le seguenti applicazioni:

a) alla rappresentazione dei numeri reali sopra una retta e studio delle proprietà inerenti;

b) alla illustrazione grafica delle proprietà delle equazioni (equivalenze e comprensività);

c) alla risoluzione grafica delle equazioni e inequazioni algebriche dei primi tre gradi almeno;

d) alla chiarificazione di concetti e semplicazione di dimostrazioni in trigonometria;

e) al calcolo di quantità metriche in geometria (distanze, aree e volumi);

f) allo studio della variazione dei fenomeni nelle scienze affini.

Digitized by Google

In particolare, il prof. Burnengo nella sua esposizione ha dato:

1° uno studio elementare della funzione razionale intera di 5° grado: $y = ax^5 + bx^3 + cx + d$;

2° una regola sintetica, conveniente in pratica, per la risoluzione delle inequazioni dei primi tre gradi;

3° una dimostrazione della formula che dà l'area di un triangolo di cui si conoscono le coordinate dei vertici, servendosi del concetto di coordinata senza ricorrere all'equazione della retta nè a cambiamento di assi e stabilendo inoltre una opportuna corrispondenza fra i segni delle aree dei triangoli ed i segni del determinante cui esse danno luogo.

Tutta la conferenza del prof. Burnengo, seguita con interesse dai presenti, è accolta da applausi. Il prof. Loria fa notare come il procedimento accennato dall'oratore illustri chiaramente l'introduzione di soluzioni estranee; cita poi metodi grafici assai convenienti per la risoluzione delle equazioni di 2° e di 5° grado. Interloquiscono variamente sull'argomento i proff. Padoa, Togliatti e Gonella.

Alle ore 19 la seduta è tolta.

Il Segretario — G. GUARESCHI

Il Presidente — G. LORIA

Adunanza del 10 giugno 1926 [1].

I soci della Sezione Ligure « Mathesis », ricorrendo quest'anno il quarantesimo anno d'insegnamento, presso la R. Università di Genova, del prof. GINO LORIA, si sono adunati alle ore 17 nella solita aula del R. Istituto Tecnico, gentimente concesso, per rendere omaggio al loro Presidente.

Sono presenti alla cerimonia intima, oltre i soci al completo, i proff. Severini, Straneo, Barbieri della R. Università, il professor Garibaldi della R. Scuola d'Ingegneria Navale, il Provveditore agli Studi comm. Rossi, il Provveditore a riposo prof. Parchesi, il preside del R. Liceo Colombo prof. Torre.

Il prof. Nannei, preside del R. Istituto Tecnico, con acconce e sentite parole, ricorda ai presenti l'opera del prof. Loria come

---

[1] Questo verbale, per errore, non era stato trasmesso prima per la pubblicazione negli Atti. Pubblicandolo ora cogliamo l'occasione di dire che il Presidente della « Mathesis », a nome del Consiglio direttivo e dell'intera Società, espresse congratulazioni ed augurî all'illustre Presidente della Sezione Ligure, associandosi alla simpatica festa promossa dai più vicini colleghi nella ricorrenza del suo quarantesimo anno d'insegnamento.

Digitized by Google

scienziato, come socio fondatore di « Mathesis », come Presidente della Sezione fino dai suoi primordi; si rende interprete dei sentimenti di affetto di tutti i soci verso il prof. Loria e gli porge una targa artistica che la sezione offre al festeggiato.

Quindi il prof. Guareschi legge l'adesione del Presidente della Società prof. Federigo Enriques, accolta da unanime consenso.

Il prof. Loria, dopo avere con commozione ringraziato i presenti per l'attestazione fattagli, legge la conferenza: *Durante quarant'anni di insegnamento; confessioni e ricordi.*

La fine della bella orazione, pronunciata con la ben nota efficacia, è salutata con calorosi applausi da tutti i convenuti, i quali vogliono rinnovare al prof. Loria la loro affermazione di omaggio e di affetto.

Il Segretario
G. GUARESCHI

SEZIONE MILANESE

Adunanza del 7 aprile 1927.

La Sezione si è riunita alle ore 17 in un'aula del R. Politecnico. Presiede il prof. Vivanti. Sono presenti i soci: professori Angelini, Biggiogero, Canevari-Crespi, Cassina, Cisotti, Di Dia, Finzi, Lauro, Levi, Maggi, Martinotti, Masotti, Marcaletti, Mayr, Pastori, Pellini, Pontremoli, Praolini, Siriati, Spera, Volpato. Giustifica l'assenza il prof. Pedote.

Il prof. Finzi parla su i numeri complessi in fisica. L'oratore accenna all'uso dei numeri complessi nella teoria della relatività, e in idrodinamica. Si sofferma sull'impiego dei numeri complessi in elettro-tecnica, e, in modo particolare, nella teoria delle macchine elettriche.

Interloquiscono, in proposito, i professori Maggi e Cassina.

Il prof. Vivanti ringrazia l'oratore, e toglie la seduta alle ore 18,15.

Il Segretario — *Il Presidente*
B. FINZI — G. VIVANTI

Adunanza del 12 maggio 1927.

La Sezione si è riunita alle ore 17 in un'aula del R. Politecnico. Presiede il prof. Vivanti. Sono altresì presenti i soci proff. Ambrosoli, Biggiogero, Canevari-Crespi, Cassina, Chisini, Cisotti, Di Dia, Finzi, Maggi, Martinotti, Masotti, Morra, Pastori, Pellini, Pontremoli, Rossi, Spera.

Digitized by Google

Il prof. Vivanti commemora con brevi parole il primo centenario della morte di Volta, quello di Laplace e il secondo centenario della morte di Newton.

Il prof. Cassina parla sui vettori, i quaternioni, le omografie vettoriali. L'oratore, richiamata la definizione di vettore, parla delle operazioni vettoriali, introduce il concetto di omografia vettoriale, ricorda le principali proprietà delle omografie stesse. L'oratore si sofferma poscia sulla definizione di quaternione, e sulle proprietà dei quaternioni stessi. Stabilisce in fine un confronto tra quaternioni e omografie vettoriali, lumeggiando le sue considerazioni con raffronti geometrici.

La conferenza è vivamente applaudita, e il prof. Vivanti ringrazia l'oratore.

La seduta ha termine alle ore 18,30.

Il Segretario
B. FINZI

Il Presidente
G. VIVANTI

La mattina del 1° luglio corr., a Colalzo (Cadore) cessava di vivere il

PROF. PIER ANDREA FONTEBASSO

del R. Liceo-Ginnasio di Roma, Membro del Consiglio direttivo della « Mathesis ». Il Presidente, a nome dei Colleghi di questo Consiglio e dell'intera Società, esprimeva alla Famiglia le più vive condoglianze per la perdita dell'Uomo, benemerito degli studi e dell'insegnamento.

Direttore responsabile: AGILULFO RICCI

Bologna 1927 - Cooperativa Tipografica Azzoguidi

Digitized by Google

Il «Nuovo Metodo» di Leibniz, con note storiche

Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus per G. G. L. (1): questo è il titolo della memoria pubblicata da G. G. LEIBNIZ nell'ottobre del 1684 a Lipsia negli *Acta eruditorum* (pag. 467); ed ivi si espone per la prima volta il calcolo differenziale, sostanzialmente nella stessa forma e con le stesse notazioni che conserva anche oggi.

Per questo può forse riuscirne ancora interessante la lettura, ed ho cercato di darne la traduzione con alcune note; ma sarà bene delineare prima brevemente la posizione storica dei problemi che vi sono trattati.

Potremo cominciare da R. DESCARTES che risolve il problema di condurre la normale in un punto dato, ad una curva di data equazione. Si consideri un cerchio con il centro sull'asse e che intersechi la curva nel punto dato. Ora si determini sull'asse il centro del cerchio in modo che un'altra intersezione cada nel punto nel quale è da condursi la normale. La retta congiungente il centro del cerchio con il punto dato sarà la normale cercata (2).

---

(1) Ved. GOTHOFREDI GUILLELMI LEIBNITII: *Opera omnia*, t. III. Genevae, apud fratres de Tournes, 1768, pag. 167. Della memoria esiste una traduzione in tedesco di G. KOWALEWSKI, nella collezione *Ostwald's Klassiker der exakten wissenschaften*, n. 162, Leipzig, 1908; ed una in francese di PAUL MANSION.

(2) Ved. DES CARTES: *Géométrie.* 1637, pag. 342 e seg.

Digitized by Google

Ricorderemo quindi P. FERMAT ed il suo: ***Methodus ad disquirendam maximam et minimam*** (1638) (1). Il metodo consiste in questo:

Supponiamo di ricercare il massimo o il minimo di una espressione il cui valore dipende da una quantità x. Si sostituisca allora ad x, $x+e$, e la nuova espressione così ottenuta si eguagli alla primitiva. Veramente l'autore, servendosi del linguaggio di DIOFANTO usa il verbo « adaequare » che significa quasi eguagliare. Si sopprimano quindi i termini uguali nei due membri, si divida tutto per e, si sopprimano i termini contenenti ancora e. Si risolva infine l'equazione così ottenuta; ed al valore di x corrisponde il massimo o il minimo cercato.

Il metodo viene ad esempio applicato alla ricerca del massimo rettangolo, che ha per base ed altezza le due parti, in cui può venir diviso un segmento di lunghezza costante. Detto a il segmento ed x una sua parte si vuole il massimo di $x(a-x)$. Si pone: $(x+e)[a-(x+e)] = x(a-x)$.

Sviluppando, sopprimendo i termini uguali nei due membri, e dividendo per e, si ha: $-x+a-x-e=0$, e ponendo $e=0$

$$-2x+a=0, \quad \text{ossia} \quad x=\frac{a}{2}.$$

Analogamente si procede per trovare le tangenti. L'autore tratta il caso di una parabola, (fig. 1), della quale la retta DC è l'asse, D il vertice; DC l'ascissa, BC l'ordinata di un suo punto B, dal quale si vuol condurre la tangente che incontra l'asse in un punto E; si dica O un punto della tangente BE, e sia OI la sua ordinata. Considerando la relazione che passa tra le ascisse e le ordinate della parabola si ha la disuguaglianza:

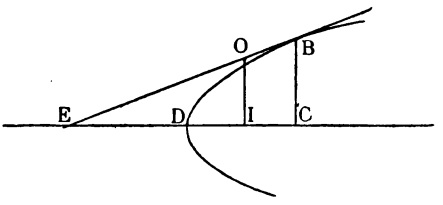


Fig 1.

$$CD : DI > BC^2 : OI^2;$$

(1) Ved. *Oeuvres* de FERMAT. Ed. PAUL TANNERY e CHARLES HENRY, t. I, Paris, Gauthiers Villars, 1891, pag. 133.

Digitized by Google

la quale sarebbe un'eguaglianza se O fosse sulla curva; ma per la similitudine dei triangoli:

$$BC^2 : OI^2 = CE^2 : IE^2$$

Quindi:

$$CD : DI > CE^2 : IE^2.$$

Ora ponendo:

$$CD = d, \quad CE = a, \quad CI = e$$

avremo:

$$d : (d - e) > a^2 : (a - e)^2.$$

Si uguaglino dunque i due membri secondo il metodo precedente, e si avrà:

$$de^2 + a^2 e = 2dae.$$

Dividendo per e, e sopprimendo il termine che ancora lo contiene, risulterà infine:

$$a = 2d.$$

Un differente punto di vista da cui guardare il problema delle tangenti, ci viene offerto da E. TORRICELLI, in una lettera a GALILEO del 29 giugno 1641. Vi si considera la curva come descritta da un punto, il movimento del quale risulti dalla composizione di due movimenti; la risultante delle velocità dei due moti sta sulla tangente alla curva in quel punto. Il metodo viene applicato per tracciare la tangente della spirale di ARCHIMEDE.

GALILEO rispose approvando. TORRICELLI pubblicò tale metodo in uno scolio al suo trattato *De motu*, e lo applicò alla cicloide (1).

Il P. M. MERSENNE attribuisce a ROBERVAL il metodo stesso, e lo applica alla parabola, come si legge nella sua opera *Cogitata physico-mathematica* finita di stampare il 15 settembre 1644 (2).

---

(1) Ved. E. TORRICELLI: *Opera Geometrica*. Firenze, 1644, pag. 121.

(2) Ved. FERDINANDO IACOBI: *Evangelista Torricelli e il metodo delle tangenti*. Bollettino Boncompagni, t. VIII. Roma, 1875.

Digitized by Google

Il metodo di FERMAT per le tangenti veniva seguito con leggere modificazioni da SLUZE (1623-1685) e da HUDDE (m. 1704); mentre venivano studiati da MICHELANGELO RICCI (1619-1682) nuovi problemi di massimi e minimi; come, ad esempio, il massimo di $x^m y^n$ dove $x + y$ è costante (1).

Il metodo di FERMAT venne perfezionato da I. BARROW (1630-1674) (2).

Si arriva così al metodo esposto da NEWTON in una lettera a J. COLLINS dell'anno 1672 (3).

Supponiamo di avere l'equazione di una curva algebrica in x e y; moltiplichiamo ciascun termine dell'equazione per il grado al quale compare la y nel termine stesso; poi sulla equazione primitiva eseguiamo la stessa operazione rispetto alla x, dividiamo per x quel che ne risulta; allora la frazione avente per numeratore la prima espressione ottenuta, e per denominatore l'ultima, è uguale alla lunghezza del segmento compreso tra il punto di contatto e l'intersezione della tangente con l'asse.

Ora pur lasciando da parte la polemica sulla priorità nella scoperta del calcolo sarà bene vedere il seguito della lettera citata.

Ivi NEWTON dichiara che la regola esposta non è che il corollario di un metodo generale per condurre le tangenti alle curve algebriche e trascendenti, e risolvere problemi concernenti le lunghezze, le aree, i baricentri, e così via.

Ma risultati di questo genere, con la regola di derivazione per le potenze ad esponente qualsiasi, venivano pubblicati da NEWTON nel 1704, nell'opera *De quadratura curvarum*, pubblicata in appendice all'« Ottica » (4).

Ora i metodi pubblicati prima dell'anno 1684, esigevano per essere applicati, che l'equazione venisse ridotta a forma intera; e tale riduzione poteva riuscire talvolta lunga e com-

---

(1) Ved. MICHELANGELO RICCI: *Geometrica exercitatio.* Roma, 1666 (Fu ristampata a Londra nel 1668).

(2) Ved. I. BARROW: *Lectiones geometricae.* 1669 e 1674, lect. X.

(3) *Commercium epistolicum d. Johannis Collins*, etc. Londra 1712, pag. 29.

(4) *Optiks: or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light. Also two Treatises of the species and magnitude of Curvilinears Figures.* London. 1704.

Digitized by Google

plicata. Invece il metodo di LEIBNIZ non presenta più questo inconveniente, perchè enuncia per la prima volta le regole di differenziazione per le frazioni ed i radicali; e appunto questo vien detto subito nel titolo della memoria di cui segue la traduzione completa.

*
* *

Nuovo metodo per i massimi e i minimi come pure per le tangenti, che non si indugia intorno a quantità frazionarie e irrazionali, ed un singolare genere di calcolo per quei problemi.

Sia dato l'asse AX, e più curve come VV, WW, YY, ZZ, e le ordinate di un loro punto, normali all'asse, siano VX, WX,

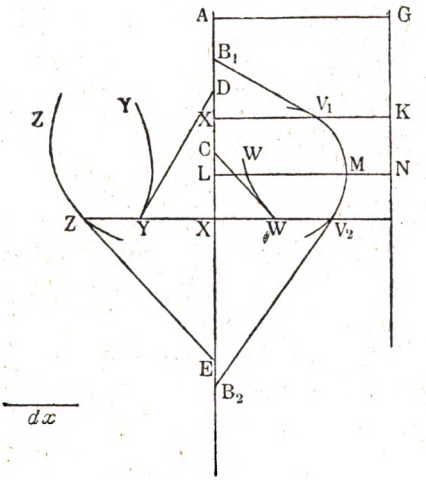


Fig. 2.

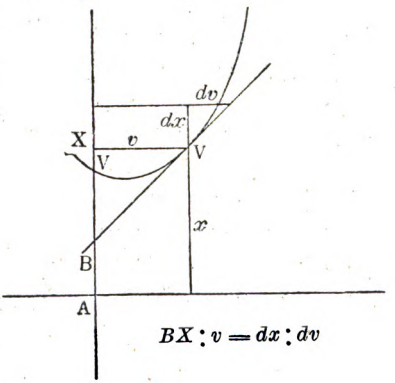


Fig. 3.

YX, ZX: queste si dicono rispettivamente v, w, y, z; ed il segmento AX tagliato sull'asse, sia detto x. Le tangenti siano VB, WC, YD, ZE, le quali incontrano l'asse rispettivamente nei punti B, C, D, E (fig. 2) (1).

---

(1) La fig. 2 è tratta dalla traduzione tedesca di J. KOVALEWSKI; le fig. 4 e 5 si trovano nelle opere di Leibniz, ed. già citata.

Il presente lavoro è stato eseguito durante lo svolgimento del *Corso di storia delle matematiche*, tenuto dal prof. G. VACCA, nella R. Università di Roma.

Digitized by Google

Ora un segmento preso ad arbitrio, sia detto dx [1] ed un segmento (fig. 3) che sta a dx, come v (o w, o y, o z) sta a BX (o CX, o DX, o EX) sia detto dv (o dw, o dy, o dz) ossia differenza delle stesse v (o delle stesse w, o y, o z).

Ciò posto le regole del calcolo saranno queste:

Sia a una quantità data costante, sarà

$$da = 0 \quad \text{e} \quad dax = adx$$

Se abbiamo $y = v$ (ossia un'ordinata qualsiasi della curva YY, è uguale ad una qualsiasi ordinata corrispondente della curva VV) sarà: $dy = dv$.

Addizione e **sottrazione**: se si ha

$$z - y + w + x = v,$$

sarà

$$d(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx.$$

Moltiplicazione:

$$dxv = xdv + vdx$$

ovvero posto $y = xv$ sarà $dy = xdv + vdx$.

Infatti è ad arbitrio impiegare un'espressione come xv, oppure brevemente una sola lettera come y.

È da notarsi che in questo calcolo si trattano nello stesso modo, tanto x come dx, tanto y quanto dy, o un'altra qualsiasi lettera indeterminata come il suo differenziale.

---

(1) Nella memoria non compare in modo esplicito l'ipotesi che dx e dy tendano a zero.

Più avanti si dice soltanto che si deve considerare come loro tangente la retta che unisce due punti della curva infinitamente vicini.

Invece, nella lettera del 21 giugno 1677, di Leibniz ad Oldenburg, da trasmettersi a Newton, viene già delineato il calcolo differenziale nei suoi elementi essenziali: si parla di ordinate aventi una differenza infinitamente piccola; e nel calcolo del differenziale di y^2, si dice espressamente di trascurare il quadrato di una quantità infinitesima. (Ved. *Commercium epistolicum* etc., ed. 1712, pag. 88). Questo modo di vedere è forse da attribuirsi ad una influenza più diretta delle idee di Barrow.

Si nota tuttavia qualche incertezza nel pensiero di Leibniz intorno al valore dei differenziali.

Digitized by Google

È anche da notarsi che non sempre può darsi il procedimento inverso a partire da un'equazione differenziale, se non con una certa cautela di cui si dirà altrove.

Divisione:

$$d\frac{v}{y} \quad \text{oppure, posto} \quad z = \frac{v}{y},$$

$$dz = \frac{\pm vdy \mp ydv}{y^2}.$$

Quanto ai *segni* [1] è da notarsi ora questo: quando viene sostituito alla lettera, semplicemente il suo differenziale, si devono conservare gli stessi segni, e in luogo di $+z$ scrivere $+dz$, e in luogo di $-z$, $-dz$, come appare dall'addizione e dalla sottrazione esposta poco prima. Ma quando si viene alla discussione dei valori, o quando viene considerata la relazione di z con x, appare allora se dz è una quantità positiva, o minore di zero, ossia negativa: in quest'ultimo caso, la tangente ZE si conduce dal punto Z non verso A ma in direzione opposta, ossia al disotto di X, e ciò accade quando le stesse ordinate z decrescono mentre crescono le x.

E poichè le stesse ordinate v, ora crescono ed ora decrescono, dv sarà talora una quantità positiva e talora negativa: nel primo caso la tangente V_1B_1 viene condotta verso A, e nell'altro V_2B_2 in direzione opposta.

Nè un caso, nè l'altro si presenta poi nel mezzo in M, nel quale momento le stesse v nè crescono nè decrescono ma sono stazionarie, e così è $dv = 0$, dove non importa che la quantità sia positiva o negativa, poichè $+0 = -0$; ed ivi la stessa v, vale a dire l'ordinata LM è *massima* (se volgesse la convessità all'asse sarebbe *minima*), e la tangente alla curva in M nè si conduce al disopra di X verso A quivi avvicinandosi all'asse, nè sotto X in direzione opposta, ma risulta parallela all'asse.

Se dv è infinito rispetto a dx, allora la tangente è perpendicolare all'asse, ossia è l'ordinata stessa.

---

[1] Leibniz non avendo fissato esatte convenzioni sull'uso dei segni in geometria analitica, si trova costretto a complicare le regole del calcolo introducendo segni ambigui.

Digitized by Google

Se dv e dx sono uguali la tangente forma un angolo semiretto con l'asse.

Se crescendo le ordinate v crescono pure gli stessi loro incrementi, o i differenziali dv (ossia se presi i dv positivi anche i d^2v differenze delle differenze sono positivi, e se negitivi, negativi) la curva volge all'asse la sua *concavità*, nel caso contrario la sua *convessità*: dove però è massimo o minimo l'incremento, o dove gl'incrementi da decrescenti divengono crescenti, o viceversa, ivi è un *punto di flesso*: concavità e convessità si scambiano fra loro purchè però nello stesso punto le ordinate da decrescenti non divengano crescenti o viceversa; allora infatti la concavità o la convessità rimarrebbe; non può invece accadere che gl'incrementi continuino a crescere o a decrescere ma le ordinate diventino da crescenti decrescenti o viceversa.

Si trova quindi un punto di flesso quando d^2v è zero, mentre v e dv sono diversi da zero. Cosicchè nel problema del flesso si hanno tre radici eguali, e non due sole come nel problema della massima ordinata.

In tutti questi calcoli occorre un retto uso dei segni.

Talvolta poi sono da adoperarsi i *segni ambigui* come si è detto nella divisione, prima cioè che risulti come debbono essere interpretati.

E invero se crescono (o decrescono) le $\frac{v}{y}$, i segni ambigui in $d\frac{v}{y}$ ossia in $\frac{\pm vdy \mp ydv}{y^2}$ devono interpretarsi in modo che la frazione sia una quantità positiva (o negativa). Inoltre $\mp$ significa il contrario di $\pm$, in modo che se questo è $+$ quello sia $-$, e viceversa.

Possono pure in uno stesso calcolo, presentarsi più ambiguità, che distinguo per mezzo di parentesi: ad esempio se fosse:

$$\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v} = w$$

sarebbe:

$$\frac{\pm vdy \mp ydv}{y^2} + \frac{(\pm)ydz(\mp)zdy}{z^2} + \frac{(\pm)xdv(\mp)vdx}{v^2} = dw;$$

altrimenti le ambiguità sorte da espressioni diverse si confonderebbero. E qui è da notarsi che una quantità avente

Digitized by Google

segno ambiguo, moltiplicata per sè stessa dà un risultato positivo, per il suo contrario negativo, per un'altra di segno ambiguo forma una nuova ambiguità che dipende da entrambe.

Potenze:

$$dx^a = ax^{a-1}dx$$

ad esempio:

$$dx^3 = 3x^2dx$$

$$d\frac{1}{x^a} = -\frac{adx}{x^{a+1}}$$

ad esempio:

se è $w = \frac{1}{x^3}$ sarà $dw = -\frac{3dx}{x^4}$.

Radici:

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$$

(Di qui si deduce che:

$$d\sqrt{y} = \frac{dy}{2\sqrt{y}},$$

poichè in questo caso a è uguale a 1, e b è uguale a 2; dunque $\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$ viene ad essere uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{y^{-1}}$, e $y^{-1} = \frac{1}{y}$ per la natura degli esponenti della progressione geometrica, e $\sqrt{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$);

$$d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = \frac{-adx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}.$$

Sarebbe invero bastata la regola della potenza intera, per determinare i differenziali tanto delle frazioni come delle radici; la potenza infatti diviene una frazione quando l'esponente è negativo, e si muta in radice quando l'esponente è frazionario: ma ho preferito dedurre io stesso queste conseguenze, piuttosto che lasciarle ad altri da dedurre, dal momento che sono assai generali e s'incontrano spesso, e in un argomento per sè stesso complesso è preferibile pensare alla facilità.

Dalla conoscenza di questo particolare *algoritmo*, o di questo calcolo che io chiamo *differenziale*, tutte le altre equa-

Digitized by Google

zioni differenziali possono ricavarsi per mezzo del calcolo comune, ed ottenersi i massimi e i minimi, come pure le tangenti, in modo che non sia necessario far sparire le frazioni o gl'irrazionali, od altri vincoli, come tuttavia si doveva fare, secondo i metodi sin'ora pubblicati.

La dimostrazione di tutte le regole esposte, sarà facile per chi è versato in questi studii, ed una cosa sola non è stata sin qui spiegata a sufficienza: che cioè si possano avere dx, dy, dv, dw, dz, proporzionali alle differenze o agl'incrementi o alle diminuzioni momentanee di x, y, v, w, z (rispettivamente).

Quindi, data una equazione qualsiasi, si può scrivere la sua equazione differenziale, in questo modo.

Per ogni *termine*, (ossia ogni parte che concorre a formare l'equazione per sola addizione o sottrazione) si sostituirà semplicemente la quantità differenziale del termine; e invece per un'altra quantità (che non sia un termine, ma concorra a formare un termine) s'impiegherà la sua quantità differenziale, per formare la quantità differenziale del termine stesso, non semplicemente, ma secondo l'algoritmo precedentemente stabilito.

Invero i metodi pubblicati sin'ora non presentano questo passaggio, impiegano infatti per lo più un segmento come DX o un altro analogo, ma non il segmento dy, che è il quarto proporzionale dopo DX, XY, dx, ciò che confonde tutto; in conseguenza di queste loro premesse, prescrivono d'eliminare prima le quantità frazionarie e irrazionali (che entrano indeterminate).

È pure evidente che il nostro metodo si estende alle linee trascendenti, che non si possono ricondurre al calcolo algebrico, o che non sono di grado determinato; e ciò in un modo generalissimo, senza ricorrere ad alcuna supposizione particolare che non sempre si verifica; purchè si ritenga in genere, che trovare la *tangente* è condurre una retta che congiunga due punti aventi una distanza infinitamente piccola, o tracciare il lato prolungato di un poligono infinitangolo che per noi equivale alla *curva*. Quella distanza infinitamente piccola, è sempre nota per mezzo di qualche differenziale come dv, o può essere espressa per mezzo di una relazione con questo, cioè per via di una certa tangente nota.

Digitized by Google

In particolare (1), se y è una quantità trascendente, ad esempio un'ordinata della cicloide, ed essa entra in un calcolo per mezzo del quale si determina l'ordinata z di un'altra curva, e si cerca dz, ovvero per mezzo di questo si cerca la tangente di quest'ultima curva, sarebbe da determinarsi dz per mezzo di dy, si avrebbe poi dy, poichè si ha la tangente della cicloide.

Se poi si suppone di non avere ancora la tangente della cicloide, similmente si potrebbe trovare con il calcolo, da una proprietà nota delle tangenti del cerchio.

Mi piace poi di proporre un esempio di questo calcolo, dove, si noti, io indico la divisione in questo modo: $x:y$, ciò che è lo stesso che x diviso per y o $\frac{x}{y}$ (2).

Sia l'equazione 1ª o data:

$$x:y+(a+bx)\cdot(c-x^2):(ex+fx^2)^2+ \\ +ax\sqrt{g^2+y^2}+y^2:\sqrt{h^2+lx+mx^2}=0,$$

la quale esprime una relazione tra x ed y, ossia tra AX e XY, posto che $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m$ siano quantità date; si cerca il modo di condurre da un dato punto Y, la tangente YD alla curva, ossia si cerca il rapporto del segmento DX al segmento dato XY. Per brevità poniamo:

$$a+bx=n, \quad c-x^2=p, \quad ex+fx^2=q \\ g^2+y^2=r, \quad h^2+lx+mx^2=s,$$

---

(1) Leibniz dà qui la regola della differenziazione di una funzione di funzione, in modo involuto perchè ricorre ad una perifrasi per indicare l'idea stessa di *funzione*. La parola *funzione* sarà da lui adoperata per la prima volta dieci anni più tardi (« Acta Eruditorum », 1694; Math. Schriften, ed. Gerhardt, t. V, pag. 306).

(2) La notazione $x:y$ qui introdotta da Leibniz per economia tipografica, è stata probabilmente suggerita dalla analoga notazione di Mengoli $x;y$. (Mengoli: *Geometriae speciosae Elementa*, Bononiae 1659, *Elementum primum*, pag. 8). Si noti che Leibniz ha tolto da Mengoli la notazione della virgola in luogo della parentesi o dei vincoli. (Leibniz: *Math. Schriften*, t. VII, pag. 221).

In questa nota Leibniz scrive $d, x:y$ ciò che noi scriviamo $d\frac{x}{y}$, ovvero $d(x:y)$. In questa versione i vincoli e le virgole sono stati sostituiti dalle parentesi.

Digitized by Google

ed avremo:

$$x : y + np : q^2 + ax\sqrt{r} + y^2 : \sqrt{s} = 0.$$

E questa sia l'equazione 2ª.

Ora dal nostro calcolo risulta che:

$$d(x : y) = (\pm x dy \mp y dx) : y^2,$$

e similmente:

$$d(np : q^2) = [(\pm) 2npdq (\mp) q(ndp + pdn)] : q^3,$$
$$d(ax\sqrt{r}) = (axdr : 2\sqrt{r}) + adx\sqrt{r}$$
$$d(y^2 : \sqrt{s}) = \left[\left((\pm)\right) y^2 ds \left((\mp)\right) 4ysdy\right] : 2s\sqrt{s}$$

e tutte queste quantità differenziali sommate insieme saranno eguali a zero e daranno in questo modo l'equazione 3ª; così difatti ai termini della 2ª equazione si sostituiscono i loro differenziali.

Ora:

$$dn = bdx, \quad dp = -2xdx, \quad dq = edx + 2fxdx$$
$$dr = 2ydy, \quad ds = ldx + 2mxdx.$$

E sostituiti questi valori nell'equazione 3ª si avrà l'equazione 4ª, dove le quantità differenziali che sole restano, vale a dire dx e dy, si trovano sempre fuori dei denominatori e delle parentesi, ed ogni termine è contrassegnato da dx o da dy rispettando la legge d'omogeneità sempre, riguardo a queste due quantità, per quanto sia complicato il calcolo: onde sempre si può avere il valore di $dx : dy$, ossia del rapporto di dx a dy, cioè di DX cercata a XY data; e in questo nostro calcolo, (mutando l'equazione 4ª in proporzione) tale rapporto sarà:

$$dx : dy = \left[\mp x : y^2 - axy : \sqrt{r}\left((\pm)\right) 2y : \sqrt{s}\right] :$$
$$\left[\mp 1 : y(\pm) 2np(e + 2fx)q^3(\mp)(-2nx + pb) : q^2 + \right.$$
$$\left. + a\sqrt{r}\left((\pm)\right) y^2(l + 2mx) : 2s\sqrt{s}\right].$$

Ma si danno x ed y essendo dato il punto Y.

Si danno pure i valori soprascritti delle lettere n, p, q, r, s, per mezzo di x ed y. Si ha dunque quanto si cercava. E sce-

Digitized by Google

gliemmo questo esempio abbastanza complicato, soltanto perchè apparisse il modo di usare le precedenti regole anche in un calcolo alquanto difficile. Ora è meglio mostrarne l'uso in esempi più evidenti per l'intelletto.

Siano dati due punti C ed E ed una retta SS complanare con essi; cercasi un punto F sulla retta SS, tale che congiunti C con F, ed F con E, la somma dei rettangoli, CF per una data h, ed EF per una data r, sia minima di tutte le possibili. Così avviene se SS è la linea di separazione di due mezzi, ed h rappresenta la densità di un mezzo, come l'acqua, dalla parte di C, ed r la densità di un mezzo, come l'aria, dalla parte di E: si cerca un punto F tale che la via da C ad E per F, sia la più facile di tutte le possibili (fig. 4).

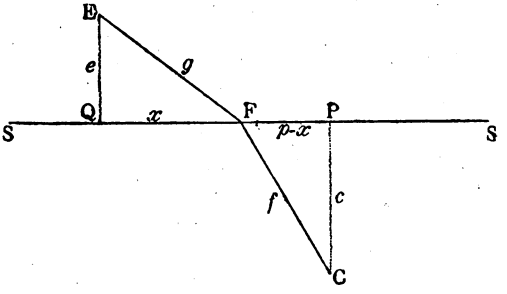


Fig. 4.

Poniamo che tutte queste possibili somme di rettangoli, o tutte le difficoltà delle vie possibili, siano rappresentate dalle stesse KV ordinate della curva VV, normali alla retta GK (fig. 2); le chiameremo ω, e si cerchi la minima di esse NM.

Poichè si danno i punti C ed E si daranno anche i segmenti perpendicolari ad SS, vale a dire CP (che chiameremo c), EQ (che chiameremo e), ed inoltre PQ (che diremo p), la stessa QF poi, che è uguale a GN (o ad AX) sarà chiamata x e CF f, ed EF g. Sarà $FP = p - x$, $f = \sqrt{c^2 + p^2 - px + x^2}$ o brevemente $\sqrt{l}$, e $g = \sqrt{e^2 + x^2}$ o brevemente $\sqrt{m}$.

Abbiamo dunque:

$$\omega = h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$$

e la sua equazione differenziale (posto $d\omega = 0$ in caso di minima) è

$$0 = -hdl : 2\sqrt{l} - rdm : 2\sqrt{m}$$

per le regole già esposte del nostro calcolo.

Ora è

$$dl = -2(p - x)dx \quad \text{e} \quad dm = 2xdx$$

Digitized by Google

sarà dunque:

$$h(p - x) : f = rx : g.$$

Ora se queste considerazioni si applicano alla diottrica, e se si pone $f = g$, ossia $CF = EF$, poichè rimane invariata la rifrazione, comunque sì ponga la lunghezza del segmento CF; sarà:

$$h(p - x) = rx \quad \text{ossia} \quad h : r = x : (p - x)$$

ossia h sta ad r come QF sta ad FP; cioè, i seni degli angoli d'incidenza e di rifrazione (proporzionali rispettivamente a QF ed FP) stanno fra loro inversamente alle densità dei mezzi nei quali avviene l'incidenza e la rifrazione. E questa densità è da intendersi non rispetto a noi, ma rispetto alla resistenza che i mezzi offrono ai raggi della luce (1).

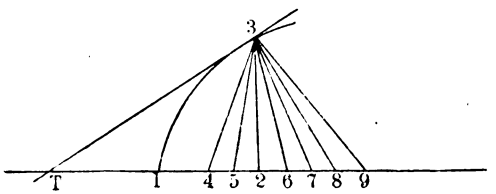


Fig. 5.

E si ha così la dimostrazione del calcolo, altrove da noi indicato in questi stessi atti, quando esponevano il fondamento generale dell'Ottica, della Catottrica e della Diottrica (2).

Chi ha imparato questo calcolo otterrà così in tre linee, quanto era stato ricercato per vie tortuose da altri dottissimi studiosi.

E ancora confermerò questo con un altro esempio. Sia la curva 133 (fig. 5) di tale natura che da un punto qualsiasi di essa come 3, condotti a sei punti fissi sull'asse 4, 5, 6, 7, 8, 9, sei segmenti 34, 35, 36, 37, 38, 39, sommati insieme formino

---

(1) Il problema qui riportato da LEIBNIZ era già stato risolto da FERMAT, il quale osservava: « La nature agit toujours pour les voies les plus courtes » (lettera di FERMAT a LA CHAMBRE del 1° gennaio 1662. Ved. *Opere*, ed. già citata, vol. II, 1894, pag. 457).

(2) Ved. LEIBNIZ: *Opera omnia*, Genevae 1768, t. III, n. IX, pag. 145: *Unicum opticae, catoptricae et dioptricae principium* (« Acta Erud. », 1682). Qui egli annunzia in pubblico per la prima volta il suo metodo dei massimi e minimi, che « super omnes hactenus notas, calculum mirifice contrahit ».

Digitized by Google

un dato segmento g. Sia l'asse: $T14526789$ e 12 sia l'ascissa, 23 l'ordinata; si cerca la tangente $3T$ (1); dico che:

$$T2:23 = \left(\frac{23}{34}+\frac{23}{35}+\frac{23}{36}+\frac{23}{37}+\frac{23}{38}+\frac{22}{39}\right):$$

$$:\left(\frac{24}{34}+\frac{25}{35}+\frac{26}{36}+\frac{27}{37}+\frac{28}{38}+\frac{29}{39}\right).$$

E la regola sarà la stessa continuando soltanto la serie dei termini, se si supporranno non più sei punti fissi, ma dieci o più ancora; mentre risolvere il problema con il calcolo, secondo i metodi per le tangenti, già pubblicati, dopo avere eliminato gl'irrazionali, sarebbe un'impresa tediosissima e talvolta insuperabile, come se si dovessero uguagliare ad una quantità data, tutti i rettangoli piani o solidi, ottenuti dal prodotto di quei segmenti dati, secondo tutti gli aggruppamenti possibili formati di due o tre numeri. Ed in tutti questi

---

(1) $34+35+36+37+38+39=g$. Chiamiamo x ed y le coordinate del punto 3; ed a_4, a_5,.... rispettivamente le ascisse dei punti 4, 5,.....
Avremo:

$$\sqrt{(x-a_4)^2+y^2}+\sqrt{(x-a_5)^2+y^2}+\sqrt{(x-a_6)^2+y^2}+\sqrt{(x-a_7)^2+y^2}+$$
$$+\sqrt{(x-a_8)^2+y^2}+\sqrt{(x-a_9)^2+y^2}=g;$$

ora

$$d\sqrt{(x-a_4)^2+y^2}=\frac{d[(x-a_4)^2+y^2]}{2\sqrt{(x-a_4)^2+y^2}}=\frac{(x-a_4)dx+ydy}{\sqrt{(x-a_4)^2+y^2}}.$$

Analogamente per gli altri termini, e $dg=0$; quindi:

$$\left(\frac{24}{34}+\frac{25}{35}+\frac{26}{36}+\frac{27}{36}+\frac{28}{37}+\frac{29}{39}\right)dx+$$
$$+\left(\frac{23}{34}+\frac{23}{35}+\frac{23}{36}+\frac{23}{37}+\frac{23}{38}+\frac{23}{39}\right)dy=0.$$

Dato che: $dx:dy=T2:23$, ne consegue il risultato esposto nel testo, dove però non si tien conto del segno.

Inoltre nel testo si legge -24 e -25, perchè assumendo come positivo il verso da sinistra a destra, si considerano i segmenti 42 e 52.

Ora $42=-24$, $52=-25$.

Digitized by Google

casi ed in altri assai più complicati, molto maggiore di quel che si crede è la rarissima semplicità del nostro metodo (1).

E questi invero sono soltanto gl'inizi d'una geometria molto più sublime, che si estende a qualunque dei problemi più difficili e più belli anche della Matematica mista, che senza il nostro calcolo differenziale nessuno ragionevolmente tratterebbe con pari facilità.

Come appendice mi piace aggiungere la soluzione di un problema proposto da F. DE BEAUNE (2) a CARTESIO (t. 3° epistole) e ch'egli tentò ma non risolse.

Si tratta di trovare una curva WW (fig. 2) di tale natura che condotta all'asse una tangente WC, sia XC sempre uguale

---

(1) Questo problema era stato proposto da DESCARTES a FERMAT nel 1649 in una lettera perduta. È stato conservato in una lettera di FERMAT del 20 agosto 1650 (*Oeuvres*, t. 2, pag. 286):

« M. Descartes, que je nomme avec tout le respect qui est dû à la memoire d'un si merveilleux homme, proposait comme une difficulté insurmontable la question suivante:

« Étant donnés quatre points et une courbe, en laquelle prenant un point à discretion, les droites menées de ce point aux quatre donnés fassent une somme donnée, trouver une tangente à quelconque point donné de cette courbe »

ainsi que je puis faire voir par une de ses lettres [cette lettre n'a pas été conservée]. Pourtant mes methodes jointes ensemble en donnent la solution simple, et l'operation se fait en se jouant ».

La soluzione di FERMAT non ci è stata conservata.

LEIBNIZ diede una soluzione più completa del problema, togliendo la restrizione che i punti fissi siano allineati su di una retta, nella nota: « Deux problèmes construits par M. G. G. Leibniz en employant sa règle générale de la composition des mouvement », Journ. des Savans, 1693, *Opera omnia*, t. 3, pag. 285. Questa generalizzazione gli fu suggerita dall'opera *Medicina mentis*, di TSCHIRNHAUSEN.

Una soluzione era stata pubblicata prima di LEIBNIZ da FATIO DUILLER; una soluzione era stata pubblicata dal marchese de l'HOSPITAL: *Analyse des infiniment petits*, 1695, part. I, prop. X.

(2) FLORIMOND DE BEAUNE (n. 1601, m. 1651). Commentò la *Geometria* di DESCARTES. Si veda la seconda edizione coi commenti raccolti da SCHOOTEN del 1659-1661. Per il problema qui risolto: ved. *Oeuvres* de DESCARTES, ed. Tannery, t. II, Paris 1898; lettera di Descartes a de Beaune del 20 febbraio 1639. Ved. anche t. V, Paris 1903, lettera di de Beaune a Mersenne del 5 marzo 1639, pag. 535.

Digitized by Google

ad uno stesso segmento costante a. Ora XW o w sta a XC, ossia a, come dw sta a dx (1).

Dunque se dx (che si può prendere ad arbitrio) si assume costante, ossia sempre uguale a b, se cioè le x o le AX crescono uniformemente, sarà $w = \frac{a}{b} dw$, per cui saranno le stesse ordinate w, proporzionali agli stessi loro incrementi o differenze, cioè se le x sono in progressione aritmetica, saranno le w in progressione geometrica, o se le w sono i numeri, le x saranno i logaritmi: dunque la linea WW è la curva logaritmica.

ETTORE CARRUCCIO

---

(1) $w : a = dw : dx$, $dx : a = dw : w$; componendo:

$$\frac{dx + a}{a} = \frac{dw + dw}{w}$$

$$w + dw = w_1 = w \frac{dx + a}{a}$$

$$w_1 + dw = w_2 = w \left(\frac{dx + a}{a}\right)^2$$

. . . . . .

$$w_{n-1} + dw = w_n = w \left(\frac{dx + a}{a}\right)^n.$$

Ma $ndx = x$, $n = \frac{x}{dx}$; quindi:

$$w_n = w \left(\frac{dx + a}{a}\right)^{\frac{x}{dx}}$$

Un'equazione analoga si trova in NEPERO (n. 1550, m. 1617). Ved. *Giovanni Nepero e l'opera sua*; commemorazione tenuta il 12 dicembre 1914, nel Seminario Matematico dell'Università di Roma dal prof. G. VACCA.

In simboli moderni, ponendo:

in luogo di w_n, w
in luogo di w, w_0
e di dx h

avremo:

$$w = w_0 \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{\frac{x}{h}} = w_0 \left[\left(1 + \frac{h}{a}\right)^{\frac{a}{h}}\right]^{\frac{x}{a}}.$$

Per h tendente a zero l'equazione della curva sarà:

$$w = w_0 e^{\frac{x}{a}}.$$

Digitized by Google

Le serie divergenti

I.

Le serie divergenti prima di Abel e di Cauchy.

1. Come venivano usate le serie. — Gli antichi analisti operavano sulle serie come su somme formate da un numero finito di termini, eseguendo su di esse, oltre alle operazioni aritmetiche o algebriche, la derivazione e l'integrazione termine a termine, senza preoccuparsi della natura delle serie che sottoponevano ai loro calcoli.

Del resto l'integrazione era spesso lo scopo per cui passavano da una espressione finita a uno sviluppo in serie. Così ad esempio per ottenere la quadratura dell'iperbola o del cerchio, essi scrivevano, spingendo all'infinito l'ordinaria divisione o estrazione di radice, rispettivamente:

$$(1) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} - \dots$$

e riducevano così l'integrazione di espressioni frazionarie o irrazionali a quella di espressioni contenenti soltanto potenze intere e positive della variabile.

Gli sviluppi ottenuti venivano poi considerati validi per qualunque valore della variabile, ossia le eguaglianze come le (1) e (2) considerate senz'altro come identità.

Diamo qualche esempio del loro modo di procedere:

Digitized by Google

a) JACOPO BERNOULLI (1) per determinare la somma della serie

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{\sigma_n}+\ldots$$

con $\sigma_n = 1+2+\ldots n$, pone:

$$N = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

$$N-1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

da cui, sottraendo termine a termine e poi moltiplicando per 2:

$$2 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots$$

E si noti che egli stesso dà due dimostrazioni della divergenza della serie armonica di cui si serve.

b) GIOVANNI BERNOULLI (2) riesce a sommare la serie

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

(che era già costata inutili sforzi a lui e a LEIBNIZ) nel modo seguente:

Parte dallo sviluppo

$$y = \operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\ldots$$

Ponendo $y=0$ e dividendo per x ottiene, per determinare i valori di x che rendono $\operatorname{sen} x = 0$, l'*equazione*:

$$0 = 1-\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\ldots$$

---

(1) *Propositiones Aritmeticae de Seriebus infinitis earumque summa finita.* 1689.

(2) *Summatio seriei quadratorum reciprocae.* (Presumibilmente di poco posteriore al 1705 e pubblicata nelle opere complete nel 1742).

Digitized by Google

e ponendo $x = \frac{1}{z}$

$$0 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot z^2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot z^4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot z^5} + \ldots$$

$$0 = z^{2n} - \frac{z^{2n-2}}{2 \cdot 3} + \frac{z^{2n-4}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{z^{2n-6}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

Ma l'*equazione* in x hà le radici note π, 2π, 3π,... a cui corrispondono per l'*equazione* in z^2 le radici $\frac{1}{\pi^2}$, $\frac{1}{(2\pi)^2}$, $\frac{1}{(3\pi)^2}$...

E, in virtù della prima delle relazioni tra i coefficienti e le radici di un' equazione algebrica, ottiene:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$$

c) EULERO [1] crede che la serie

$$1 - 3 + 5 - 7 + \ldots$$

abbia per somma 0 e lo ottiene nel modo seguente:

$$\frac{x}{1 + x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \ldots$$

derivando:

$$\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \ldots$$

e ponendo $x = 1$

$$0 = 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots$$

2. I criteri di convergenza e di divergenza. Le discussioni. — Pur servendosi come abbiamo visto, senza preoccupazioni di sorta, delle serie, anche se divergenti, gli antichi

---

[1] *De seriebus quibusdam considerationes.* 1740.

Digitized by Google

analisti non mancarono di dar criteri di convergenza o di divergenza, alcuni dei quali di carattere generale.

Già NEWTON (1), dopo aver dato il metodo di risoluzione di equazioni algebriche per mezzo di serie, sente il bisogno di dimostrare che le serie trovate si avvicinano tanto più al valore delle radici che rappresentano, quanto maggiore è il numero dei termini che si considerano.

LEIBNIZ (2) osserva, a proposito della serie:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

che l'errore che si commette arrestandola a un termine qualunque è, in valore assoluto, minore del primo dei termini che si trascurano e, passando poi in generale alle serie con termini alternativamente positivi e negativi, dà, anche se con considerazioni non rigorose, la nota condizione sufficiente per la loro convergenza (3).

EULERO (4) trova, considerando le serie armoniche, che, affinchè una serie sia convergente, deve essere, per n qualunque:

$$\lim_{m=\infty} S_m^n = 0$$

dove con S_m^n indica la somma degli n termini dopo l'emmesimo. MAC LAURIN (5) dà un criterio generale necessario e sufficiente per la convergenza delle serie a termini positivi.

Eppure EULERO, che si serve del criterio ora ricordato per dimostrare la divergenza di alcune serie, che dice senz'altro evidente che la somma della serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots \frac{n}{n+1} + \dots$$

---

(1) *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas.* 1669. (Pubblicata nel 1704).

(2) *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa.* 1682.

(3) Ne dà la dimostrazione nel 1714 in una lettera a Giov. Bernoulli.

(4) *De progressionibus harmonicis observationes.* 1734. (Comm. Petrop.).

(5) *Treatise of Fluxions.* 1742.

Digitized by Google

i cui termini pur si mantengono finiti, abbia valore infinito, non ha nessuna esitazione a parlare di somma di serie i cui termini tendono all'infinito e a scrivere uguaglianze come la seguente:

$$(1') \qquad 1+2+4+8+\ldots=\frac{1}{1-2}=-1$$

persuaso com'è che la (1) valga senza limitazioni.

Risultati così paradossali non potevano passare senza discussioni.

Nicola Bernoulli (1) ad esempio dice che non si può persuadere che una serie divergente rappresenti esattamente il valore dell'espressione da cui proviene, e che non è

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^\infty$$

bensì

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^\infty+\frac{x^{\infty+1}}{1-x};$$

dà esempi di espressioni uguali, che sviluppate col solito procedimento della divisione, danno origine a serie diverse, come:

$$\begin{cases} -1=\dfrac{1}{1-1-1}=1+1+2+3+5+8+13+\ldots \\ -1=\dfrac{1}{1-2}=1+2+4+8+16+\ldots; \end{cases}$$

non approva il procedimento che abbiamo descritto all'esempio *b*) e dice che non si può parlare di somma di una serie quando i suoi termini aumentano oltre ogni limite.

Ma Eulero sostiene che qualunque serie, convergente o divergente, debba avere una determinata somma, e afferma che somma di una serie è l'espressione da cui essa proviene. Per dar ragione di risultati come (1') mette in campo i numeri *più che infiniti di Wallis* (2).

---

(1) In alcune lettere scritte a Eulero nel 1743 e pubblicata nel 1843 « Corrésp. Math. e Phys. de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle ».

(2) Vivanti: *Paradossi dell'infinito.* Questo « Periodico », serie IV, vol. I, n. 3, maggio 1921, pag. 205.

Digitized by Google

Anche d'ALEMBERT (1) muove delle giuste obiezioni al modo allora in uso di considerare le serie e operare su di esse e dice che tutti i ragionamenti e i calcoli fatti su serie non convergenti gli sembrano sempre molto sospetti, anche quando conducono a risultati che si accordano con verità conosciute per altra via.

Ma, nonostante qualche opposizione, la concezione di EULERO aveva il soppravvento, avvalorata dai brillanti risultati a cui egli era giunto servendosi delle serie.

3. **La serie di Grandi** (2). — Famosa nella storia delle serie è rimasta, per le discussioni a cui ha dato luogo, per gli espedienti escogitati dai matematici allo scopo di darne la dimostrazione, la serie che si ha dalla (1) ponendo $x = 1$

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{3}$$

La considerò per primo JACOPO BERNOULLI che chiamò la (3) *paradosso non inelegante* (3). Col solito procedimento della divisione egli trova

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \ldots$$

e ponendo $m = n$

$$\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \ldots \tag{3'}$$

Egli dà la spiegazione della (3') nel modo seguente: i resti della divisione: $-\frac{ln}{m}, +\frac{ln^2}{m^2}, -\frac{ln^3}{m^3}, \ldots$ nel caso $n < m$ vanno continuamente decrescendo, invece nel caso $n = m$ sono tutti eguali a $\mp l$. Per avere quindi il quoziente esatto bisognerà aggiungere o togliere $\frac{l}{2m}$ secondo che si considera un numero pari o dispari di termini della serie.

---

(1) « Opuscules Math. », 1761 e 1768.
(2) VIVANTI, Ibidem, pag. 205-209.
(3) *Proposit. de Ser, inf. pars tetia.* 1696.

Digitized by Google

GUIDO GRANDI ([1]) invece cerca di spiegare la (3) con l'esempio seguente. Un padre morendo lascia un gioiello indivisibile ai suoi due figli i quali lo tengono successivamente ciascuno un anno, convenendo che questa alternata proprietà debba valere indefinitamente anche per i loro eredi. Così il valore posseduto da ciascuno di essi è la metà di quello del gioiello.

Egli inoltre trova nella (3), che si può scrivere

$$\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

una spiegazione della possibilità della creazione dal nulla.

Le affermazioni di GRANDI suscitarono una viva discussione a cui parteciparono molti matematici d'allora e che venne più volte ripresa nel seguito.

Fra gli oppositori di GRANDI ricorderemo VARIGNON, che (d'accordo in sostanza con JACOPO BERNOULLI) dice ([2]): visto che la divisione $\frac{1}{1+1}$ continuata indefinitamente dà 0 o 1 secondo che il numero dei termini considerati è pari o dispari, si conclude che tale divisione non dà nulla in questo caso, e che, ciascuna operazione distruggendo la precedente, bisogna sempre ricominciare, come se non si fosse fatto nessuna operazione quando il numero dei termini è pari, come se se ne fosse fatta una sola quando il loro numero è dispari.

Egli poi, persuaso che si debba andar cauti nell'uso delle serie, afferma in generale che, affinchè una serie possa avere un valore finito, bisogna che i suoi termini diminuiscano continuamente ([3]).

Fra i sostenitori della (3), se non in tutto delle idee di GRANDI, va ricordato LEIBNIZ, il quale la dimostra applicando il calcolo delle probabilità ([4]). Se la serie fosse formata da un numero pari di termini la sua somma sarebbe 0, se fosse formata da un numero dispari di termini la sua somma

---

([1]) *De infinitis infinitorum infinitecque parvorum ordinibus.* 1710.

([2]) In una lettera scritta nel 1712 a Leibniz.

([3]) *Précautions à prendre dans l'usage des suites* etc., « Histoire Ac. des Sciences », 1717.

([4]) In una lettera scritta a Wolff e pubblicata negli « Acta Erud. », 1713.

Digitized by Google

sarebbe 1, e poichè l'infinito non ha nè il carattere di numero pari, nè quello di numero dispari, così i due valori 0 e 1 sono ugualmente probabili, e il valore della serie sarà la loro media aritmetica e cioè $\frac{1}{2}$.

Questo procedimento della media aritmetica, proposto da LEIBNIZ, fu poi applicato da DANIELE BERNOULLI [1] ad altre serie analoghe a quella di GRANDI e che egli chiamò *periodiche*, ottenendo ad esempio:

$$1+0-1+1+0-1+\ldots=\frac{1+1+0}{3}=\frac{2}{3}$$

$$1-1+0+1-1+0+\ldots=\frac{1+0+0}{3}=\frac{1}{3}.$$

Esso non è altro che il metodo di CESÀRO, di cui parleremo al n. 6 applicato ad alcune particolari serie fra quelle che egli chiamò *semplicemente indeterminate*.

Anche il modo con cui più tardi LAGRANGE [2] rimosse una nuova obiezione fatta da CALLET alla (3) si ricollega col metodo di LEIBNIZ.

Si ha, con n, m qualunque, purchè interi e positivi

$$(4) \qquad \frac{1-x^n}{1-x^m}=1-x^n+x^m-x^{n+m}+x^{2m}-\ldots$$

e per $x=1$

$$\frac{n}{m}=1-1+1-1+\ldots$$

La serie di GRANDI ha dunque per somma una frazione qualunque. Ma, osserva LAGRANGE, la serie (4) ottenuta mediante la divisione, non è in generale completa; per renderla tale bisogna inserire degli 0 al posto delle potenze di x mancanti. Così nel caso particolare di $n=3$, $m=5$, si deve considerare la serie:

$$1+0+0-x^3+0+x^5+0+0-x^8+0-x^{10}+\ldots$$

---

[1] *De summationibus serierum quarundarum incongrue veris* ecc., 1771. (Novi Comm. Petrop.).

[2] *Rapport sur le Mémoire de Callet.* « Mém. Inst. de France, vol. III.

Digitized by Google

e facendo $x = 1$, si ha:

$$1+0+0-1+0+1+0+0-1+0+1+\ldots = \\ = \frac{1+1+1+0+0}{5} = \frac{3}{5}.$$

LAGRANGE fa qui quello che nell'analisi moderna si chiama una *diluizione non uniforme*. Come abbiamo visto, anche DANIELE BERNOULLI aveva diluito non uniformemente la serie di GRANDI ottenendo così valori diversi da $\frac{1}{2}$. Invece una diluizione uniforme come la seguente:

$$1+0-1+0+1+0-1+\ldots$$

non altera la *somma* della serie.

II.

Il rigore introdotto da Abel e da Cauchy.

4. È merito sopra tutto di ABEL e di CAUCHY di aver decisamente combattuto i ragionamenti non rigorosi, di aver stabilito nettamente la distinzione tra serie convergenti e divergenti, e di aver quindi escluse queste ultime dalle considerazioni che si potevano riferire soltanto alle prime.

ABEL [1] dice che una serie divergente non può mai essere uguale a una determinata grandezza, che è puramente una espressione con certe proprietà che dipendono dalle operazioni a cui la serie si sottopone; e di più [2], che le serie divergenti sono qualcosa di ben fatale ed è una vergogna che si osi fondare su di esse delle dimostrazioni matematiche, anche se i risultati per la maggior parte dei casi sono giusti.

---

[1] *Untersuchungen über die Reihe* $1+\binom{m}{1}x^2+\binom{m}{2}x^2+\ldots.$ (« Crelle's Jour. », 1827).

[2] In una lettera scritta a Holmboë nel 1826 e pubblicata nelle Opere complete.

Digitized by Google

CAUCHY (1), pur essendo dello stesso parere, cerca di attenuare, almeno nell' espressione, la rigidità delle innovazioni, e si dice forzato ad ammettere delle proposizioni che sembreranno un po' dure, come quella che una serie divergente non abbia somma.

Inoltre egli si preoccupa di stabilire il modo di utilizzare serie anche divergenti. Considerando una progressione geometrica a ragione negativa

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{a^{n+1}} + \ldots$$

osserva che, sia essa convergente o divergente, l' errore che si commette arrestandola a un termine qualsiasi è minore, in valore assoluto, tanto dell' ultimo termine considerato, quanto del primo di quelli che si trascurano e del segno di quest' ultimo (2); ed estendendo la proprietà a un insieme infinito di tali progressioni, viene a stabilire in qual modo la serie di STIRLING, divergente per qualsiasi valore della variabile, possa venire utilizzata per il calcolo approssimato del logaritmo della funzione euleriana di seconda specie:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dz \ (3).$$

III.

Le serie divergenti nell' analisi moderna.

5. Le serie asintotiche. — Seguendo l' esempio di CAUCHY sul modo di utilizzare serie divergenti, come quella di STIRLING,

---

(1) « Analyse algébrique », 1821 (nella prefazione).

(2) Si ha infatti:

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} + \theta_n$$

con

$$\theta_n = (-1)^n \frac{1}{1+\frac{x}{a}} \cdot \frac{x^n}{a^{n+1}} = (-1)^n \frac{x}{a+x} \cdot \frac{x^{n-1}}{a^n}.$$

(3) « Comptes Rendus », 1843.

Digitized by Google

vennero studiate (dopo un certo periodo di tempo nel quale gli analisti non si occuparono più delle serie divergenti) alcune serie di potenze di $\frac{1}{x}$, che si possono far corrispondere a funzioni in modo tale che, anche quando sono divergenti, permettono di calcolare la funzione corrispondente con una approssimazione grande quanto si vuole, purchè sia sufficientemente grande il valore della variabile.

Sono le serie che STIELTJES [1] chiamò *semi-convergenti* e POINCARÈ [2] *asintotiche*.

Si dice che una funzione $f(x)$ è rappresentabile asintoticamente dalla serie

$$(5) \qquad a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots$$

quando, per n qualunque, si ha:

$$\lim_{x=\infty}\left[f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \ldots - \frac{a_n}{x^n}\right] = 0.$$

Se una funzione $f(x)$ è rappresentabile asintoticamente, lo è in modo unico, essendo i coefficienti della serie corrispondente (5) determinati dalle relazioni:

$$\lim_{x=\infty} f(x) = a_0, \quad \lim_{x=\infty} x[f(x) - a_0] = a_1, \quad \lim_{x=\infty} x^2\left[f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x}\right] = a_2 \ldots$$

supposto naturalmente che i limiti esistano.

La reciproca però non è vera, e cioè ogni serie come la (5) non rappresenta asintoticamente un'unica funzione.

Basta osservare che la funzione e^{-x} è rappresentata asintoticamente da una serie identicamente nulla. Si ha infatti:

$$a_0 = \lim_{x=\infty} e^{-x} = 0, \quad a_1 = \lim_{x=\infty} x[e^{-x} - a_0] = 0, \quad a_2 = a_3 = \ldots = 0.$$

Se dunque la (5) rappresenta asintoticamente la funzione $f(x)$ rappresenterà pure asintoticamente ciascuna delle infinite funzioni $f(x) + Ce^{-x}$ (dove C è una costante arbitraria).

---

(1) *Recherches sur quelques séries demi-convergentes.* (« Ann. de l'Éc. Norm. », 1886).

(2) *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires.* (« Acta Math. », 1886).

Digitized by Google

Per giungere a questa conclusione abbiamo applicato alcune delle proprietà a cui le serie asintotiche debbono principalmente la loro importanza e che furono messe in evidenza da POINCARÈ.

Esse consistono in ciò che sulle serie asintotiche si possono eseguire le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione (sotto la condizione $a_0 \neq 0$) giungendo così a serie asintotiche che rappresentano rispettivamente la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente delle funzioni corrispondenti alle serie primitive.

Si può anche sostituire alla funzione $f(x)$ il suo sviluppo asintotico in ciascun termine della serie

$$c_0 = c_1 f + c_2 f^2 + \ldots + c_n f^n + \ldots$$

(sotto la condizione che il raggio di convergenza di questa serie sia maggiore di $|a_0|$) ottenendo così lo sviluppo asintotico della funzione $\varphi(x)$ che questa serie rappresenta.

Nel caso poi che, oltre alla funzione $f(x)$ sia rappresentabile asintoticamente anche la funzione $f'(x)$ (il che non sempre si verifica) si ottiene la rappresentazione asintotica di quest'ultima derivando termine a termine quella della prima.

In virtù di queste proprietà le serie asintotiche possono trovare applicazione nella soluzione di equazioni differenziali.

Sia data un'equazione differenziale

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{6}$$

e si sappia a priori che essa possiede un integrale rappresentabile asintoticamente, insieme con le sue derivate fino a quella di ordine n^{mo}.

In generale è possibile trovare in più modi una serie di potenze di $\frac{1}{x}$ che soddisfaccia formalmente la (6), tale cioè che, messa al posto di y ed eseguite tutte le operazioni indicate nel primo membro della (6), si ottenga una serie con termini tutti nulli.

E poichè allo stesso risultato si deve giungere sostituendo nella (6) al posto di y la serie asintotica corrispondente all'integrale considerato, questa serie deve coincidere con una

Digitized by Google

di quelle trovate, in virtù dell'unicità della rappresentazione asintotica di una funzione.

Nel caso particolare che la (6) sia lineare a coefficienti razionali, il numero delle serie che si ottengono è uguale al numero degli integrali dotati di sviluppi asintotici, e tutti questi sviluppi vengono in tal modo trovati.

Osserviamo ora in generale che se si riesce a far corrispondere a ogni serie divergente una funzione $s(x)$ tale che, eseguendo sulla serie data una qualunque delle operazioni indicate nel primo membro della (6), la s_1 corrispondente alla nuova serie coincida col risultato della stessa operazione eseguita su s, le serie divergenti potranno servire alla determinazione effettiva degli integrali della (6).

Trovata infatti una serie divergente che soddisfaccia formalmente la (6), la s corrispondente sarà un integrale della (6) purchè sia nulla la s di una serie con termini tutti nulli.

E quello che BOREL fa per alcune serie, estendendo dei risultati dovuti a STIELTJES.

6. Il metodo di sommazione di Cesàro [1]. — Le considerazioni alla fine nel numero precedente fanno pensare come si possa estendere il concetto di *somma* di una serie, chiamando così una espressione opportunemente scelta che si possa far corrispondere a una serie anche se divergente e che, nel caso della convergenza, si riduca alla somma ordinaria.

Parecchie sono le estensioni date in questo senso al concetto di somma [2], ma nessuna si può applicare a tutte le serie senza distinzione.

Accenneremo ad alcune fra le più importanti, limitandoci per semplicità alle serie numeriche.

CESÀRO propone come *somma* di una serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{7}$$

---

[1] *Sur la multiplication des séries.* (« Bull. des Sciences Math. », 1890).

[2] Ricordiamo i nomi di: HARDY, LE ROY, RIESZ, WORONOI, KNOPP, CHAMPMANN, BROMWICH, LITTLEWOOD, LANDAU, VALIRON, NALLI, OTTOLENGHI ed altri. Per una esposizione critica dell'estensione del concetto di somma, con particolare riguardo ai metodi di CESÀRO e di BOREL vedi DINI: *Lezioni sulla teoria generale delle serie*, « Annali delle Università Toscane ». Nuova serie, vol. VI, fasc. 8°, 1921.

Digitized by Google

il limite seguente:

$$(8) \qquad s = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots s_{n-1}}{n}$$

dove s_i indica la somma dei primi $i+1$ termini della (7) e chiama *semplicemente indeterminate* quelle serie per cui il limite (8) esiste ed è finito.

Egli è condotto a questa introduzione dalla osservazione che se si moltiplicano due serie convergenti (nessuna delle quali sia convergente assolutamente, e alle quali quindi non sia applicabile il teorema di CAUCHY, nè quello di MERTENS) si ottiene una serie semplicemente indeterminata che ha per *somma* il prodotto delle due somme delle serie date.

Poi estende di nuovo questo concetto e introduce le serie *più volte indeterminate*, chiamando r volte indeterminata una serie (7) quando esiste ed è finito il limite seguente:

$$s = \lim_{n=\infty} \frac{u_{n-1} + \binom{r+1}{1} u_{n-2} + \dots \binom{r+n-1}{n-1} u_0}{\binom{r+n-1}{n-1}}$$

che chiama *somma* della serie.

Alle serie più volte indeterminate estende il teorema di CAUCHY, dimostrando che la serie prodotto (ottenuta con l'ordinaria regola di CAUCHY) di due serie, r e s volte indeterminate è al più $r+s+1$ volte indeterminata ed ha per *somma* il prodotto delle due *somme* delle serie date.

7. Il metodo di Borel [1]. — BOREL propone dapprima come *somma* di una serie (7) il doppio limite seguente:

$$s = \lim_{a=\infty} \frac{c_0 s_0 + c_1 a s_1 + \dots + c_n a^n s_n + \dots}{\varphi(a)}$$

dove

$$\varphi(a) = c_0 + c_1 a + \dots + c_n a^n + \dots$$

è una funzione intera, e si ferma poi più particolarmente al caso

$$\varphi(a) = e^a$$

---

[1] *Leçons sur les séries divergentes.* 1901.

Digitized by Google

ottenendo così il *metodo esponenziale*, per cui è:

$$(10)\qquad s=\lim_{a=\infty}\frac{s_0+s_1\frac{a}{1}+s_2\frac{a^2}{2!}+\ldots+s_n\frac{a^n}{n!}+\ldots}{1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}+\ldots}=\lim_{a=\infty}e^{-a}S(a)$$

e chiama *sommabili* quelle serie per cui il limite (10) esiste ed è finito.

Egli poi trasforma la (10) ottenendo la nuova espressione

$$(11)\qquad s=\int_0^\infty e^{-a}u(a)da$$

dove

$$u(a)=u_0+u_1\frac{a}{1}+\ldots+u_n\frac{a^n}{n!}+\ldots$$

è la *funzione intera associata* alla serie (7).

La condizione di sommabilità viene allora espressa dalla convergenza dell'integrale (11).

Poi, in vista sopra tutto dell'estensione del teorema di CAUCHY alle serie sommmabili, introduce la sommabilità assoluta, chiamando *assolutamente sommabile* una serie (7) quando, oltre alla convergenza dell'integrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\,|\,u(a)\,|\,da$$

si verifica pure la convergenza degli infiniti integrali

$$\int_0^\infty e^{-a}\,|\,u^{(\lambda)}(a)\,|\,da$$

dove λ è un qualunque indice di derivazione.

Per le serie assolutamente sommabili dimostra la possibilità di eseguire la somma e il prodotto nel modo ordinario.

BOREL considera i due metodi di sommazione corrispondenti alle espressioni (10) e (11) come equivalenti. Essi, come fu dimostrato da HARDY [1], non sono tali, e precisamente: le

---

[1] « Quartely Journ. of Math. », 1904.

Digitized by Google

serie sommabili col primo metodo sono sommabili anche col secondo, ma non viceversa, e sono caratterizzate dalla convergenza dell'integrale:

$$\int_0^\infty e^{-a}u'(a)da.$$

Quanto poi all'estensione del teorema di CAUCHY, fu dimostrato da SANNIA che non è necessario imporre le condizioni della sommabilità assoluta, ma che esso è applicabile senz'altro a due serie sommabili col primo metodo.

Viene invece leggermente modificato per due serie sommabili col secondo metodo.

8. **La generalizzazione di Sannia** (1). — SANNIA chiama *sommabile col metodo di Borel di ordine r*, sommabile (B, r) una serie (7) quando la serie

$$S^{(r-1)}(a) = s_{r-1} + s_r a + s_{r+1}\frac{a^2}{2!} + \ldots + s_{n+r-1}\frac{a^n}{n!} + \ldots \quad (2)$$

è una trascendente intera, ed esiste ed è finito il limite:

$$s = \lim_{a=\infty} e^{-a}S^{(r-1)}(a) \tag{12}$$

che chiama *somma* della serie.

Egli mostra poi che la definizione data è equivalente alla seguente: una serie (7) è sommabile (B, r) quando la serie

$$u^{(r)}(a) = u_r + u_{r+1}\frac{a}{1} + u_{r+2}\frac{a^2}{2!} + \ldots + u_{r+n}\frac{a^n}{n!} + \ldots$$

che chiama *serie associata di ordine r* alla data, è una tra-

---

(1) In una serie di Note e Memorie pubblicate dal 1916 al 1920 nei « Rend. Acc. Lincei », « Circ. Mat. di Palermo » e « Acc. delle Scienze » di Torino e di Napoli.

(2) Per $r = 1$, $S^{(r-1)}(a)$ coincide con $S(a)$ già usato nella formula (10). Per $r > 1$, $r - 1$ è indice di derivazione, per $r < 1$ di integrazione tra 0 ed a, con la convenzione $s_n = u_n = 0$ per $n < 0$.

Digitized by Google

scendente intera ed è convergente l'integrale

$$s = \int_0^\infty e^{-a} u^{(r)}(a)\,da \tag{13}$$

il cui valore coincide con quello di (12).

I metodi di BOREL corrispondenti alle (10) e (11) coincidono rispettivamente coi metodi $(B, 1)$ e $(B, 0)$.

Inoltre dimostra che ogni serie sommabile (B, r) con somma s è anche sommabile $(B, r-1)$ con egual somma, ma non viceversa, almeno in generale. Considerando poi nel loro complesso i metodi (B, r), ossia considerando la successione infinita:

$$\ldots (B, -2), (B, -1), (B, 0), (B, 1), (B, 2) \ldots \tag{14}$$

egli viene a definire due nuovi metodi di sommazione che si possono in certo qual modo considerare come i *metodi limiti* della successione, di cui il più importante è il metodo che chiama B_g [1] (di BOREL generalizzato).

Una serie è sommabile B_g quando è *sommabile* con *qualcuno* dei metodi (B, r), e si chiama *somma* della serie quella *somma* s che essa possiede in virtù del metodo (B, r).

Le serie *sommabili* B_g godono di tutte le proprietà delle serie convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini, e ad esse si estende in particolare il teorema di CAUCHY in modo analogo a quello che abbiamo ricordato per le serie più volte indeterminate di CESÀRO (n. 6):

Se due serie sono sommabili (B, r) e (B, s) la serie prodotto (ottenuta applicando la regola di CAUCHY) è sommabile (B, t) con $t = -|r| - |s| - 1$ e la sua *somma* coincide col prodotto delle *somme* delle serie date.

---

[1] Esso viene anche chiamato $(B, -\infty)$ perchè, per le proprietà sopra ricordate una serie è sommabile B_g quando esiste un numero m tale che per ogni intero $r \leq m$ la serie è sommabile (B, r).

E si dice invece che una serie è sommabile B_t o $(B, +\infty)$ quando esiste un numero m tale che per ogni $r \geq m$ la serie è sommabile (B, r).

Una serie sommabile B_t è sommabile con *tutti* i metodi della successione (14).

Digitized by Google

9. Applicazione alla serie di Grandi. — I metodi di sommazione ricordati sono applicabili alle serie convergenti e danno sempre per *somma* la somma della serie nel senso ordinario. Essi invece non sono applicabili alle *serie divergenti propriamente dette* (quelle cioò per cui $\lim_{n=\infty} s_n = \infty$).

Si potranno quindi soltanto applicare (oltre che a tutte le serie convergenti [1]) a serie indeterminate.

Ne daremo un esempio mostrando che la *somma* della serie di Grandi è sempre $\frac{1}{2}$.

Per il metodo di Cesàro la cosa è già stata verificata al n. 3. Per il metodo di Borel si osservi che si ha per s_n il valore 1 o 0 secondo che n è pari o dispari, quindi

$$(15) \qquad S(a) = 1 + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

e per la (10)

$$s = \lim_{a=\infty} \frac{1 + e^{-2a}}{2} = \frac{1}{2}$$

Per il metodo di Sannia dalla (15) si ha (mediante successive derivazioni o integrazioni tra o ed a, secondo il segno di $r-1$):

$$S^{(r-1)}(a) = \frac{e^a \mp e^{-a}}{2}$$

valendo il segno superiore o l'inferiore secondo che r è pari o dispari; e quindi per la (12):

$$s = \lim_{a=\infty} \frac{1 \mp e^{-2a}}{2} = \frac{1}{2} \text{ (2)}.$$

Osservazione. — Come abbiamo già detto ci siano limitati per semplicità alle serie numeriche, ma naturalmente le più

---

(1) Fa eccezione il metodo di *sommazione assoluta* di Borel che non si può applicare a tutte le serie convergenti; esso è applicabile però a tutte le serie assolutamente convergenti.

(2) La serie di Grandi è quindi sommabile Bt. Cfr. nota a pag. 16.

Digitized by Google

importanti applicazioni delle estensioni di cui abbiamo parlato si riferiscono alle serie di funzioni e in particolare alle serie di potenze, per le quali all'ordinario cerchio di convergenza viene sostituito un campo di sommabilità che, in generale, è notevolmente più esteso.

MARIA PASTORI

Il teorema di Cauchy sulla determinazione di un poliedro mediante le sue facce

1. Fra le definizioni del libro XI d'EUCLIDE si trova (Def. 10): *Due solidi sono uguali e simili quando sono limitati da facce simili, nello stesso numero e di grandezza uguale.*

Osserva il LEGENDRE non essere questa propriamente una definizione, bensì un teorema di cui nessuna traccia di dimostrazione si trova negli *Elementi*, ed E. STEINITZ, riprendendo nell'articolo: *Polyeder und Raumeinteilungen* della « Encyklopädie der math. W. » (Bd. III, 1, AB 12), questa osservazione, avanza l'ipotesi che il testo abbia qui una lacuna.

In che cosa possa consistere questa lacuna è però difficile suggerire, perchè, sebbene la proposizione di cui si tratta, con qualche conveniente limitazione, risulti effettivamente vera, le dimostrazioni che noi ne possediamo si allontanano assai dal modo di procedere euclideo, e non è quindi facile presumere in qual modo essa avrebbe potuto essere colmata nel testo euclideo. Potrebbe apparire verosimile il pensiero accennato dal LEGENDRE quando egli afferma che tutte le volte che la definizione-teorema di EUCLIDE è essenziale per qualche dimostrazione degli *Elementi*, si tratta di poliedri ad angoloidi triedri, pei quali l'uguaglianza degli angoloidi consegue immediatamente dalla uguaglianza delle facce.

È nondimeno notevole che l'inammissibilità di questa definizione non sia stata per lungo tempo rilevata dai commentatori; e quando lo fu, la difficoltà fu invece evitata sopprimendo la definizione incriminata e modificando le dimostrazioni in cui essa era utilizzata col ricondursi all'uso di soli prismi retti

Digitized by Google

(v. per es. BORELLI: *Euclides restitutus*, Pisa 1658; TACQUET: *Elementa geometriæ*); ed è notevole ancora che il WHISTON, ripubblicando gli elementi del TACQUET (Roma 1745), crede necessario ristabilire la definizione euclidea senza por mente alla conseguente inesattezza che precisamente colla soppressione s'era voluto evitare.

Che la proposizione, quando non sia soggetta a limitazioni, non possa essere affermata fu rilevato, pare per la prima volta da R. SIMSON (1756) [1]; l'osservazione del SIMSON si riduce sostanzialmente a questo, che, se una catena di spigoli di un poliedro costituisce un poligono piano senza che questo sia una faccia, si può ottenere un nuovo poliedro, avente le facce uguali a quello dato, sostituendo a una delle parti in cui il poliedro è diviso dal detto piano la figura simmetrica rispetto al piano medesimo.

Evidentemente se il primo poliedro era convesso, il secondo non lo è più, per cui si fa spontanea la supposizione del LEGENDRE che la proposizione dovesse potersi dimostrare precisamente per i poliedri convessi.

Sviluppando alcune idee emesse dal LEGENDRE nella 1ª edizione dei suoi *Elementi*, riuscì infatti il CAUCHY [2] a dimostrare la proposizione sotto questa limitazione.

Molto più recentemente il problema interessò nuovamente i geometri sotto il punto di vista delle deformazioni continue dei poliedri (BRICARD 1897, DEHN 1916).

2. La ricerca dei poliedri aventi facce assegnate può ricondursi a quella dei poliedri aventi facce assegnate esclusivamente triangolari, purchè si ammetta che più facce consecutive possano disporsi sopra uno stesso piano: in quanto a ciascuna faccia non triangolare si può sostituire l'insieme dei triangoli in cui essa è scomposta per es. da un conveniente sistema di diagonali [3].

---

[1] *Euclides elementorum libri sex, etc.* Glasgow, 1756.

[2] *Journal de l'école polytechnique*, 16-1812.

[3] Il DEHN, nel luogo che sarà indicato più innanzi, fa un'analoga riduzione, evitando anche la generalizzazione della nozione di poliedro al caso delle facce complanari; egli sostituisce perciò a ciascuna faccia non triangolare la superficie laterale di una piramide che l'abbia come base. Questo modo di procedere non si presterebbe a proseguire nei ragionamenti che saranno esposti in seguito.

Digitized by Google

L'assegnare le facce equivale allora ad assegnare tutti gli spigoli del poliedro. Se, secondo l'abitudine, indichiamo con V, F, S rispettivamente il numero dei vertici, delle facce e degli spigoli del poliedro e se osserviamo che il poliedro è geometricamente definito sempre quando è assegnata la posizione nello spazio dei V vertici, a meno di un movimento rigido, abbiamo che per definire il poliedro occorre dare il valore di $3V-6$ coordinate; d'altra parte l'assegnare gli S spigoli equivale ad assegnare fra le dette coordinate S equazioni. Se noi supponiamo il detto poliedro euleriano si verifica subito l'uguaglianza dei due numeri; invero è, nella fatta ipotesi delle facce triangolari,

$$2S = 3F$$
$$3V + 3F = 3S + 6;$$

quindi

$$3V - 6 = 3S - 3F = S.$$

Per dimostrare che queste S equazioni sono indipendenti, almeno per poliedri generali, basta osservare che non esiste alcuna relazione funzionale fra le lunghezze degli spigoli di un poliedro generico.

Ciò è evidente per il tetraedro; supponiamo allora provato che non esiste una tale relazione per i poliedri generici di $V-1$ vertici. Se Π è un poliedro di V vertici, possiamo dedurre da esso un poliedro Π' di $V-1$ vertici sopprimendo in Π uno arbitrario A dei vertici e le facce concorrenti in esso, e chiudendo quindi il poliedro aperto Π_1 risultante mediante facce triangolari aventi per vertici quelli del poligono piano o gobbo che forma il contorno di Π_1. Il poliedro di $V-1$ vertici così ottenuto può supporsi generale, perchè inversamente, assegnato ad arbitrio un poliedro Π' di $V-1$ vertici, se ne deduce uno Π di V vertici tracciando sopra Π' una poligonale chiusa di spigoli che lasci tutti i vertici del poliedro da una stessa parte di essa e sostituendo alle facce che costituiscono l'altra parte i triangoli che si appoggiano ai lati di detta poligonale e hanno il vertice opposto comune in un punto arbitrario A dello spazio.

Fra gli spigoli di Π' non passa dunque, per ipotesi, alcuna relazione funzionale. Ma si passa con continuità da Π a Π'

Digitized by Google

supponendo che uno degli spigoli concorrenti nel vertice A si riduca a 0; quindi nessuna relazione può legare gli spigoli di Π, se questo è un poliedro generale di V vertici.

Dalla indipendenza delle S equazioni assegnate fra le coordinate dei vertici del poliedro segue che esse hanno un numero finito di soluzioni: è cioè finito il numero dei poliedri aventi le facce ordinatamente uguali a quelle di un dato poliedro generico e incongrui ad esso. Si fa quindi estremamente probabile l'ipotesi che basti una condizione qualitativa, quale quella della convessità, per caratterizzare una fra le dette soluzioni in numero finito.

3. Per dimostrare la verità di questa congettura, osserviamo anzitutto, col CAUCHY [1], che se in un angolo poliedro convesso [2] si mantengono invariate tutte le facce meno una e dei diedri non adiacenti a questa uno o più si sostituiscono con diedri maggiori, restando i rimanenti immutati e l'angolo poliedro restando sempre convesso, la detta faccia verrà sostituita da altra maggiore. La proposizione è analoga a una relativa ai poligoni piani e può essere considerata intuitiva.

Ciò premesso siano A e A' due angoloidi convessi aventi le facce ordinatamente uguali e conveniamo di contrassegnare col segno $+$ le coppie di spigoli omologhi pei quali il diedro è in A maggiore che in A', e col segno $-$ le coppie di spigoli omologhi pei quali il diedro è in A minore che in A', restando ambiguo il segno per le coppie di spigoli omologhi pei quali il diedro è uguale.

Se a e b sono due spigoli di A che siano separati da un gruppo di spigoli tutti col segno $+$, l'angolo ab sarà maggiore di quello formato dagli spigoli omologhi a' b' di A'; analogamente se a, b fossero separate da un gruppo di spigoli tutti col segno $-$, sarebbe $ab < a'b'$. Ne segue che:

---

[1] Per quanto riguarda la dimostrazione del CAUCHY, ci riferiamo alla esposizione contenuta nella 12ª ediz. degli *Eléments de géométrie* del LEGENDRE (Nota XII).

[2] Ricordiamo che la convessità di una figura a facce piane si definisce ordinariamente per la proprietà di stare tutta da una banda del piano di ciascuna sua faccia: con una generalizzazione insignificante occorrerà a noi ammettere che possano punti (facce) della figura trovarsi anche *sul* piano di una faccia qualsiasi (cfr. n. 2).

Digitized by Google

1° a e b non possono appartenere alla stessa faccia, e cioè non possono tutti gli spigoli di A e A' essere contrassegnati dallo stesso segno (o ambiguo);

2° nemmeno possono a e b essere separati in un verso da spigoli caratterizzati tutti dal segno + e nell'altro verso da spigoli tutti col segno —; ne segue che, se gli spigoli dei nostri angoloidi A e A' si riuniscono in gruppi di spigoli consecutivi dello stesso segno, si dovranno avere, nel giro, più di 2 e quindi almeno 4 gruppi di segni alterni.

4. Mediante questa proposizione dimostreremo (1) che è assurdo supporre che esistano due poliedri convessi Π e Π', limitati da uno stesso numero di facce ordinatamente uguali e che siano incongrui fra loro. Osserviamo perciò che, nell'ipotesi che si vuol dimostrare assurda, dovranno essere incongrui fra loro almeno una parte degli angoloidi omologhi in Π e Π'. Incominceremo col mostrare che si può supporre che siano incongrui *tutti* gli angoloidi omologhi: in quanto è possibile sopprimere in Π e Π' le coppie di vertici omologhi che siano vertici di angoloidi uguali, senza che i poliedri restanti cessino di avere le facce uguali e di essere convessi.

Premettiamo alcune osservazioni:

1° Sia A vertice di un poliedro convesso, $A(BCDE...)$ un angoloide convesso formato mediante spigoli consecutivi (salvo eventualmente AB e AC) del poliedro. Sia α un semipiano uscente dalla retta BC e che lasci da bande opposte il punto A e i vertici $DE...$. Facendo rotare α attorno a BC verso i punti $DE...$, la prima volta che esso verrà a passare per un vertice del poliedro, questo sarà uno dei punti $DE...$ Infatti, poichè la parte del poliedro che sta con $DE...$ dalla stessa banda del piano ABC è tutta interna (o sul contorno) dell'angoloide $A(BCDE...)$, l'opposta ipotesi equivarrebbe a dire che, quando il semipiano α passa una prima volta per un vertice M del poliedro, esso sega l'angoloide in un poligono $BCD_1E_1...$ di cui M sarebbe punto interno o del contorno

(1) È sostanzialmente la via seguita dal CAUCHY, che però ci pare di avere qui alquanto semplificata. Voglio qui ringraziare il mio maestro, prof. B. LEVI per i consigli di cui mi fu prodigo nella redazione di questo lavoro.

Digitized by Google

(non vertice). Una qualunque delle facce per M taglierebbe il piano secondo una retta che penetrerebbe nell'interno del poligono lasciandone i vertici parte da una banda e parte dalla banda opposta: sia per es. D_1 dalla banda opposta di BC. A causa della supposta convessità del poliedro, $ABCD$ dovrebbero stare dalla stessa banda del piano della faccia considerata per M mentre, per la fatta ipotesi D_1 starebbe dalla banda opposta; e ciò contraddice all'essere D_1 interno o estremo al segmento AD.

2° Se mediante una parte dei vertici di un poligono convesso si forma un nuovo poligono convesso, i vertici di quest'ultimo si seguono nello stesso ordine che sul dato e ne dividono il contorno in segmenti ciascuno dei quali sta rispetto a un lato del secondo poligono dalla banda opposta di tutta la parte residua, e forma con questo lato un poligono convesso.

Ciò premesso siano in Π e Π', A ed A' i vertici di due angoloidi uguali $A(BCDE...)$, $A'(B'C'D'E'....)$ $(B, C, D,...; B', C', D',...$ essendo i vertici di Π, Π' sugli spigoli consecutivi di A, A' rispettivamente). A causa della convessità di Π si può condurre per BC un semipiano α che stia rispetto al piano ABC dalla stessa banda del poliedro e lasci A da una parte e tutti gli altri vertici dall'altra. Facendo rotare α intorno a BC come si disse in 1°, verrà a passare una prima volta per uno o più vertici del poliedro, e questi saranno tutti fra i punti $DE...$. Per $B'C'$ e pei vertici corrispondenti di Π' conduciamo pure il piano α'.

I vertici di Π sopra α appartengono a spigoli dell'angoloide A i quali definiscono un angoloide convesso e questo stacca da A altrettanti angoloidi parziali quante sono le sue facce, che non sono facce di A, analogamente a quanto si è detto nell'osservazione 2° pei poligoni. Lo stesso avviene considerando i vertici di Π' su α' e l'angoloide A'. A causa della supposta uguaglianza degli angoloidi A, A' le figure omologhe saranno uguali.

Per ciascuno degli angoloidi parziali staccati da A (e da A') ripetiamo l'operazione precedente, prendendo come analoghi ai vertici B, C (B', C') i 2 vertici che stanno su $\alpha(\alpha')$: e così proseguiamo.

Il procedimento ha certo termine, perchè ciascuna operazione assorbe almeno uno dei vertici del poliedro sugli spigoli

Digitized by Google

per A diversi da B e C. (Esso ha senz'altro termine alla prima operazione se tutti gli spigoli per A hanno i loro secondi vertici $BCD\ldots$ complanari; in particolare se A è un triedro). Con esso si stacca da Π (e corrispondentemente da Π') un nuovo poliedro convesso, avente gli stessi vertici, tolto A (e corrispondentemente, tolto A'). I due poliedri staccati in tal modo da Π e da Π' hanno le facce uguali. Se essi avessero ancora angoloidi uguali si riprenderebbe l'operazione, per escluderne ancora i vertici. Così, dopo un procedimento finito, si deve giungere, nell'ipotesi che Π e Π' non siano uguali, a due poliedri non aventi angoloidi uguali.

5. Supponiamo ora dunque che i due poliedri Π e Π' abbiano le facce uguali, ma non abbiano angoloidi congruenti; supponiamo inoltre, secondo l'osservazione fatta nel n. 2, che essi abbiano esclusivamente facce triangolari. Attribuiamo alle coppie di spigoli omologhi i segni + e — secondo la convenzione fatta nel 3. Indichiamo con N il numero totale delle variazioni di segno che troviamo passando ordinatamente dall'uno all'altro degli spigoli di ciascun angoloide. Se V è al solito il numero dei vertici, avremo, per la seconda proposizione del n. 2,

$$N \geq 4V.$$

Ma due spigoli consecutivi in un angoloide sono pure spigoli consecutivi di una faccia determinata: ed essendo tutte le facce triangolari, nel percorrere il perimetro di ciascuna faccia, si potrà avere nessuna o 2 variazioni di segno: se F è, al solito, il numero delle facce, si ha quindi pure

$$N \leq 2F$$

e così

$$4V \leq 2F.$$

Ma questa relazione è incompatibile col teorema di EULERO; infatti, essendo S il numero degli spigoli, da

$$V + F = S + 2$$
$$2S = 3F$$

si deduce

$$4V = 4S - 4F + 8$$
$$4V = 2F + 8$$
$$4V > 2F.$$

Digitized by Google

6. La proposizione dimostrata comprende come corollario che *ogni poliedro convesso è rigido quando si suppongano indeformabili le sue facce:* sotto questa forma essa fu ridimostrata, con considerazioni topologiche dal DEHN (1). È importante rilevare la funzione essenziale dell'ipotesi, esplicitamente enunciata nelle considerazioni precedenti, che gli angoli poliedri esaminati siano sempre convessi. Si vede facilmente che, qualora si abbandonasse questa condizione, un angolo poliedro potrebbe deformarsi, mantenendo invariate le proprie facce, e per modo che i segni attribuiti agli spigoli secondo le precedenti convenzioni presentino due sole anzichè quattro variazioni di segno. Viene perciò a cadere la precedente dimostrazione dell'unicità del poliedro di cui si conoscono le facce. Poichè, come si è osservato in principio, questa unicità non è vera, in generale, sorge allora la domanda se tuttavia il numero dei poliedri aventi determinate facce (anche non convessi) sia sempre finito, nel qual caso resterebbe vera la proposizione della rigidità di ciascuna delle forme possibili, ovvero no.

La risposta a questa domanda, per poliedri generali, appare assai difficile. Riprendendo l'osservazione fatta poc'anzi, per la quale si possono sopprimere gli angoloidi indeformabili, si vede subito che la ricerca può limitarsi ai soli poliedri di cui ogni angoloide ha almeno quattro facce: si può inoltre supporre, come dianzi, che le facce siano tutti triangoli. Se allora si vuole ancora limitare lo studio ai soli poliedri euleriani, si trova che il tipo più semplice di poliedri pei quali si possa porre la domanda della deformabilità è rappresentato dagli ottaedri ($V = 6$, $F = 8$, $S = 12$). Per questi, una ricerca assai minuta del BRICARD (*Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé*, « Journal de Liouville » (5) 3-1897) ha assegnato effettivamente tre tipi di poliedri deformabili.

MARIA TURCHETTI

(1) *Ueber die Starrheit konvexer Polyeder.* Math. Ann., 77, 1916.

Digitized by Google

Recensioni e Note bibliografiche

G. JULIA. *Éléments de Géométrie infinitésimale.* Gauthier-Villars, Parigi 1927, pag. VI + 242.

Questo libro contiene le lezioni svolte dall'A. alla Sorbona su le applicazioni geometriche del calcolo e si distingue da le esposizioni usualmente più note soprattutto per due aspetti, l'uno relativo alla materia trattata, l'altro al metodo seguito. Infatti, quanto alla materia, l'A. svolge con una certa estensione la teoria delle congruenze di rette, e ciò gli permette qualche applicazione interessante agli integrali singolari di equazioni differenziali; quanto al metodo, l'A. si serve spesso del calcolo vettoriale che nello studio di teoremi generali dà luogo a semplificazioni notevoli della dimostrazione.

Il volume comprende una introduzione (nella quale sono esposte le generalità sulla rappresentazione delle curve e delle superficie) e quattro capitoli. Nel primo di questi è svolta la teoria del contatto e sono studiati gli inviluppi e le famiglie di rette a uno e due parametri; nel secondo è esposta la teoria elementare delle curve piane e gobbe (elementi osculatori proprietà intrinseche, formule di FRENET), e sono poi trattate alcune famiglie particolari di curve e la congruenza delle normali a una curva dello spazio; nel terzo sono svolti i fondamenti della teoria delle superficie (linee su una superficie, linee di curvatura, asintotiche) e i risultati di questo studio sono poi applicati alle congruenze di rette; infine il quarto tratta della rappresentazione delle superficie l'una su l'altra (superficie applicabili, rappresentazione conforme, carte geografiche).

Chiude il volume una nota relativa agli elementi immaginarii e un'altra sul calcolo vettoriale.

G. S.

Digitized by Google

Varietà e Questioni proposte

In quanto tempo un pianeta, fermato, cadrebbe nel sole?

Il problema rientra in quello del movimento di un punto materiale, attratto da un centro, con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro medesimo, nell'ipotesi che la velocità, ad un istante, sia nulla; con che la trajettoria appartiene alla retta passante per la posizione al suddetto istante — posizione iniziale — e pel centro. Formato allora l'asse della x con questa retta, prendendone come positivo il senso che volge verso la posizione iniziale, e preso il centro come origine, il problema s'imposta mediante l'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mp\frac{\mu}{x^2}, \tag{1}$$

dove μ indica una costante, e va preso — o + secondo che il punto mobile, al tempo t, si trova dalla parte positiva o dalla parte negativa dell'asse delle x, colle condizioni iniziali

$$t = 0, \quad x = x_0 > 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0. \tag{2}$$

Da (1), moltiplicando i due membri per $\frac{dx}{dt}$, e integrando, con riguardo a (2), si ricava, in primo luogo,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{|x|} - a^2, \tag{3}$$

indicato con $|x|$ il modulo di x, e fatto

$$\frac{2\mu}{x_0} = a^2. \tag{4}$$

Digitized by Google

Donde, con facile calcolo, indicando con t il tempo corrispondente al movimento del punto tra x_0 e x $\left(x>0,\ \frac{dx}{dt}\gtrless 0\right)$, si ricava

$$t=\frac{1}{a^2}\sqrt{x(2\mu-a^2x)}+\frac{\mu}{a^3}\arccos\frac{a^2x-\mu}{\mu}. \tag{5}$$

Ne viene

$$\tau=\pi\frac{\mu}{a^3} \tag{6}$$

pel tempo che il punto impiegherà a portarsi dalla posizione iniziale al centro; risultato che si presta alla deduzione della semplice relazione seguente.

Supponiamo che, al tempo $t=0$, restando $x=x_0$, la velocità abbia grandezza V_0 data da

$$V_0^2=\frac{\mu}{x_0}=\frac{a^2}{2},$$

e direzione perpendicolare al raggio descritto dal centro al punto, che sono le condizioni necessarie e sufficienti pel movimento circolare, uniforme del punto (1).

Il tempo τ' appartenente ad una rivoluzione completa risulta

$$\tau'=\frac{2\pi x_0}{V_0}=2\pi\frac{2\mu}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{a}=4\sqrt{2}\,\frac{\mu}{a^3}.$$

Cioè, per (6),

$$\tau'=4\sqrt{2}\tau,$$

$$\tau=\frac{1}{4\sqrt{2}}\tau'=\frac{1}{5{,}66}\tau'.$$

Se nè conclude che, coll'approssimazione con cui il movimento di un pianeta intorno al Sole può essere equiparato ad un movimento circolare uniforme, col centro nel sole, il tempo che il pianeta, qualunque esso sia, impiegherebbe a cadere nel Sole, quando fosse annullata, ad un istante, la velocità del suo movimento annuo, è poco più di un sesto dell'anno del pianeta medesimo (2).

G. A. Maggi

---

(1) Cfr. per es. la mia *Geometria del Movimento*, (Zanichelli, Bologna, 1927), pag. 203.

(2) Questo esercizio figura nella 1ª e 2ª edizione della mia *Geometria del Movimento*, dove tuttavia, nell'ultimo risultato è incorso un errore numerico $\left(\tau=2\sqrt{2}\tau' \text{ anzichè } \tau=\frac{1}{4\sqrt{2}}\tau'\right)$; fu tolto invece dalla 3ª edizione (Bologna, Zanichelli, 1927).

Digitized by Google

Questioni proposte.

153. Dati nel piano: un punto A, una retta a e una retta p in posizione affatto generica, determinare il punto P di p per cui è minimo il rapporto delle distanze da A e da a.

Risolvere il problema per via elementare ed analitica, e illustrare il problema e la soluzione dal punto di vista della geometria proiettiva.

O. CHISINI

154. Il problema « inscrivere in un cerchio di raggio r un triangolo isoscele di area s^2 », in vari tentativi ha condotto ad equazioni di 3° o di 4° grado irriducibili. Si può risolvere con equazioni o sistemi di 2° grado o riducibili al 2°?

A. N.

155. Date le equazioni

$$(ax+b)(1+x)^2-x(bx+a)=0, \tag{1}$$

$$(ax^2+b)(1+x)^2+x^2(bx+a)=0, \tag{2}$$

$$\sqrt[7]{x}+1-\sqrt[7]{x+1}=0 \tag{3}$$

dimostrare che fra le cinque radici della (2) tre sono radici della (1) e le altre due sono radici doppie della (3).

G. DI DIA

156. Qual'è la probabilità che estraendo dalla tombola un terno la somma dei suoi numeri non superi 90?

A. SICILIANO

157. Determinare la superficie che incontra ortogonalmente la famiglia di paraboloidi

$$x^2+y^2-2az=0$$

e che taglia il cilindro circolare di raggio 1 avente per asse l'asse z lungo la sua intersezione col piano $z=x$.

G. VIVANTI

Digitized by Google

Risposte.

A proposito delle questioni nn. 142, 143 pubblichiamo la seguente lettera diretta dal prof. B. Levi al prof. F. Enriques, ed un chiarimento, relativo alla questione 143, comunicatoci dal prof. G. A. Maggi. E con ciò crediamo la questione sufficientemente discussa e illuminata [1].

Chiar.mo Professore,

Discorrendo amichevolmente con Lei, rilevai al suo tempo le questioni 142, 143 proposte sul « Periodico di Matematica » dal prof. Del Lungo. Poco amico, in massima, dei paradossi, le consideravo tuttavia come tali da stuzzicare utilmente la riflessione di qualche lettore.

Leggo ora nel N. IV (15 luglio) del medesimo Periodico le risposte pervenute e mi fanno pensare che qualche parola di chiarimento non sia inutile, principalmente considerando che oggi, almeno nelle scuole medie, il matematico dovrebbe essere pure un poco fisico, ed il fisico, matematico.

La questione 142 pone a raffronto due proposizioni galileiane relative al moto dei gravi: « la discesa di un grave lungo le corde di una circonferenza posta in piano verticale, terminate tutte al punto più basso di questa circonferenza, si fa in tempi uguali » e « la discesa di un grave lungo tutti gli archi della circonferenza terminati a detto punto più basso (purchè piccoli) si fa in tempi uguali »; ma i due tempi, notoriamente, non sono uguali fra loro sebbene, tendendo gli archi a 0, la differenza fra la corda e l'arco divenga infinitesima del 2° ordine. È paradossale?

Secondo la risposta comparsa nel « Periodico »: « l'errore *si può far consistere* nell'attribuire al grave, con velocità nulla un movimento sul segmento infinitesimo... orizzontale »; ma io credo che alla generalità dei lettori interesserà di chiarire in modo intuitivo la differenza fra i due tempi della caduta, la quale si mantiene finita e costante quando l'arco e la corda vengono a differire fra loro sia in lunghezza, sia in posizione, di quantità arbitrariamente piccole, pur senza ridursi precisamente a 0, e senza divenire precisamente orizzontali: un fatto veramente, e non un errore.

---

[1] Alcune considerazioni intorno alla Questione n. 142 ci sono anche pervenute poi dal prof. R. Perri; ma non crediamo necessario pubblicarle sembrandoci la questione stessa già qui abbastanza chiarita.

Digitized by Google

Ed il fatto consiste in questo: lungo la corda il grave scende con accelerazione costante; lungo l'arco il grave scende con accelerazione variabile e decrescente, e precisamente questa seconda accelerazione uguaglia la prima soltanto quando il mobile è giunto a metà dell'arco. Ne segue che *certamente* la prima metà dell'arco è percorsa con velocità maggiore (dopo tempi uguali) della prima metà della corda. D'altronde anche per quanto riguarda la seconda metà del percorso, se pure l'accelerazione lungo l'arco viene a diminuire, ha influenza preponderante la velocità acquisita; ed invero un'altra proposizione galileiana (ovvero il principio generale della conservazione dell'energia) ci assicura che le velocità dei due mobili, scendenti l'uno lungo la corda e l'altro lungo l'arco, divengono uguali all'estremo della corsa, il che mostra che solo allora la diminuita accelerazione lungo l'arco avrà condotta la maggior velocità del grave ad adeguarsi alla minor velocità di quello che scende lungo la corda.

Si possono precisare alquanto, in numeri, queste considerazioni di maggiore e minore, senza ancora uscire dall'ambito puramente intuitvo. Così un'osservazione geometrica immediata mostra che, all'inizio del moto, il rapporto delle accelerazioni lungo la corda e lungo l'arco è $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{sen}\alpha$, dove α rappresenta l'ampiezza dell'arco; questo rapporto tende quindi a $\frac{1}{2}$ col tendere dell'arco a 0: si possono quindi determinare sulla corda e sull'arco due segmenti uguali, all'inizio della trajettoria, i quali sono percorsi in tempi il cui rapporto è molto prossimo a $\sqrt{2}$: ed osservando che i tratti iniziali sono quelli che, trattandosi di moto accelerato, portano il maggior contributo nella misura del tempo, ecco l'intuizione medesima a dirci che, proprio per la caduta infinitesima, il rapporto dei tempi, lungo la corda e lungo l'arco, è bensì $< \sqrt{2}$, ma non troppo discosto da questo numero.

Si ottiene immediatamente un limite inferiore di questo rapporto se si divide la trajettoria (corda ed arco) in due segmenti di cui il primo sia $\frac{1}{4}$ del percorso totale: nel moto uniformemente accelerato lungo la corda, questo segmento è percorso nella metà del tempo totale. Ma l'accelerazione lungo l'arco corrispondente ha all'accelerazione lungo la corda un rapporto $> \operatorname{sen}\frac{3}{4}\alpha : \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ o più semplicemente, per archi piccolissimi, $> \frac{3}{2}$; quindi il tempo della discesa lungo l'arco corrispondente risulta $< \frac{t}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, essendo t

Digitized by Google

il tempo totale della caduta lungo la corda; ed il tempo totale della caduta lungo l'arco risulta

$$< \frac{t}{2} + \frac{t}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{t}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 0{,}9t,$$

avendo preso $\frac{t}{2}$ come un limite superiore del tempo impiegato a percorrere il secondo segmento $\left(\frac{3}{4}\right.$ del tutto$\left.\right)$ dell'arco. Così, riassumendo, il tempo della caduta lungo la corda, ha per archi infinitesimi, al tempo della caduta lungo l'arco rapporto compreso fra $^{10}/_{9}$ e $\sqrt{2}$: e tale è infatti il rapporto fornito dal calcolo $4:\pi$.

La questione 143 consisteva in questo: « Da un treno che passa colla velocità v un viaggiatore lascia cadere una pietra di massa m: l'energia cinetica della pietra, rispetto al suolo, considerato fisso, sarà $E = \frac{1}{2}mv^2$: ma se invece il viaggiatore lancia la pietra, nella direzione del moto del treno, imprimendole una velocità relativa v, onde la velocità della pietra rispetto al suolo considerato come fisso risulti $2v$, l'energia cinetica della pietra sale a $4E$. Si ha un apparente guadagno di energia pari a $2E$, del quale si domanda l'origine ».

All'opposto della eccessiva concisione della risposta alla questione precedente, mi pare che quella riportata nel « Periodico » per quest'ultima non possa soddisfare l'intuizione per un eccesso di calcoli, ed anche perchè precisamente questi calcoli implicano ipotesi restrittive (come la considerazione d'una forza costante) che non hanno relazione coll'essenza del problema. Qui la risposta è tutta contenuta nel principio del moto del baricentro: solo apparentemente il viaggiatore può lanciare la pietra senza alterare il moto del treno: in realtà soltanto il baricentro del sistema treno + pietra si muove di moto uniforme; ma se il baricentro della pietra accelera il proprio moto, deve di conseguenza ritardare il baricentro del treno: e l'energia cinetica perduta per tale ritardo è precisamente uguale a quella guadagnata dalla pietra in più di quella fornita dal viaggiatore.

Ma è questa veramente $2E$? Un calcolo semplice mostra che così è soltanto in quanto si possa trascurare il rapporto fra la massa della pietra e quella del treno.

Se invero si chiamano m e M queste due masse, e se x è la velocità acquistata dalla pietra rispetto al baricentro treno + pietra, il treno dovrà aver acquistata una velocità relativa $-\frac{m}{M}x$, e se

Digitized by Google

si indica con L il lavoro eseguito dal viaggiatore, sarà

$$L = \frac{1}{2} x^2 m \left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

mentre l'energia totale della pietra, rispetto al suolo sarà

$$\frac{1}{2} m(v + x)^2.$$

L'eccesso di energia cinetica apparente nella pietra risulta

$$\frac{1}{2} m(v + x)^2 - E - L = mvx - L\frac{m}{M + m}.$$

Se si vuole, come nella questione proposta, che $x = v$, deve il lavoro L eseguito dal viaggiatore essere un po' maggiore di E e l'eccesso di energia apparente nella pietra risulta un poco inferiore a $2E$. Le differenze scompaiono naturalmente quando si ponga $\frac{m}{M} = 0$; ma in caso contrario le condizioni ipotetiche della questione si raggiungeranno soltanto somministrando dall'esterno al sistema l'energia necessaria a mantenere invariata la velocità del treno.

Con saluti cordiali. B. Levi

***

Le due soluzioni comparse nel n. 4 del « Periodico » (la seconda, non così la prima, necessariamente limitata all'ipotesi della forza costante) rendono ambedue ragione dell'aumento $2E$ di forza viva, col riferimento alla linea ferroviaria, anzichè al treno, mediante il maggior lavoro della supposta forza motrice, in ragione del maggiore spazio percorso dal punto di applicazione. Nella seconda poi il prof. A. Barzaghi, a cui è dovuta, accenna alla provenienza dal treno del medesimo aumento di energia, *ceduta per reazione*. Questa circostanza richiede e merita di essere ulteriormente chiarita e sviluppata.

Siano perciò due riferimenti, S, che chiameremo fisso, e S', mobile per rispetto ad esso, di moto traslatorio, rettilineo, uniforme, con velocità di grandezza v. Sia v' la grandezza della velocità di un punto avente la stessa direzione e lo stesso senso della suddetta, relativamente ad S', per modo che $v + v'$ sia la sua grandezza, relativamente ad S. La forza viva del punto di massa m risulta

$$\frac{1}{2} mv'^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} m(v + v')^2 = \frac{1}{2} mv'^2 + mvv' + \frac{1}{2} mv^2,$$

Digitized by Google

secondo che si riferisce il movimento a S' o a S, per modo che l'aumento di forza viva, in conseguenza dell'aumento di velocità v', risulta, rispettivamente,

$$\frac{1}{2}mv'^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}mv'^2 + mvv'.$$

La stessa differenza, concependo la velocità v' generata nel punto, coll'applicazione di una forza motrice, risulta, dal calcolo usato nella prima delle due ricordate soluzioni (1), pel corrispondente lavoro di questa forza, valendosi dell'uno o dell'altro dei due suddetti riferimenti.

Ora, se per lavoro del viaggiatore s'intende, con concetto prevalentemente fisico, il contributo energetico del viaggiatore, ripugna certamente pensare che il viaggiatore, con pari aumento di questo contributo, debba provvedere all'eccesso di forza viva, che trae origine dal movimento del treno, durante l'applicazione della forza motrice alla pietra.

Lasciando quindi in disparte l'esaurita ragione del corrispondente maggior lavoro, cerchiamo piuttosto il compenso del diverso aumento di energia, nell'ipotesi che il riferimento mobile S' sia connesso col centro di massa di un sistema materiale, del quale il punto materiale indicato rappresenta una parte (treno ferroviario e pietra), con movimento rettilineo uniforme del suddetto comun centro di massa. Indichino m la massa della parte, la quale, dopo un certo tempo, anteriormente al quale il movimento del sistema si suppone traslatorio, rettilineo, uniforme, riceve la velocità v', rispetto all'uno come all'altro riferimento, e M la massa della parte rimanente. L'ipotesi del movimento rettilineo, uniforme del comun centro di massa del sistema, composto dalle due parti, traendo la verificazione del teorema della conservazione della quantità di moto, il suddetto acquisto di velocità da parte della massa m sarà accompagnato da una perdita, di grandezza V, di velocità della massa rimanente M, con

$$mv' = MV;$$

per modo che, col riferimento a S, la forza viva della parte M (treno ferroviario), che, anteriormente al suddetto acquisto, era

$$\frac{1}{2}Mv^2,$$

---

(1) $ds - ds' = vdt$, donde $\int Fds - \int Fds' = v\int Fdt = mv'v$.

Digitized by Google

diventa

$$\frac{1}{2}M\left(v-\frac{m}{M}v'\right)^2=\frac{1}{2}Mv^2-mvv'+\frac{1}{2}\frac{m}{M}mv'^2,$$

con una perdita che compensa l'eccesso precedentemente trovato per l'aumento della forza viva della parte m, trascurando l'ultimo termine, col reputare trascurabile il rapporto $\frac{m}{M}$ rispetto all'unità

Resta, esattamente, come espressione del contributo energetico a carico del viaggiatore,

$$\frac{1}{2}mv'^2\left(1+\frac{m}{M}\right)=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}MV^2,$$

somma della forza viva di ciascuna delle parti del sistema materiale, col riferimento connesso col comun centro di massa del sistema medesimo, generata, la prima, dalla forza applicata dal viaggiatore alla pietra, e generata la seconda (trascurabile, con m insensibile in confronto di M) dalla corrispondente reazione.

G. A. Maggi

Risposta alla questione n. 144.

Nella decomposizione in parti uguali di due poligoni equivalenti del piano si distingua fra parti direttamente e inversamente uguali: si domanda se in ordine a tale distinzione vi è luogo a considerare diverse specie di equivalenza.

Osservando che due triangoli inversamente uguali sono somme di tre triangoli *isosceli*, col vertice nel circocentro, e rispettivamente uguali in senso diretto, si deduce che nel piano non v'è luogo a considerare le diverse specie di equivalenza richieste.

Questa risposta è dovuta, anche nella sua forma, al prof. A. Barzaghi.

Altre sostanzialmente uguali, se pur leggermente più complesse, ci pervennero dai professori: L. Bernini, M. Turchetti, M. Morini.

Risposta alla questione n. 146.

Determinare le curve per le quali la distanza di un punto fisso da una tangente è proporzionale alla potenza n$^{\text{ima}}$ *della distanza del punto stesso dal punto di contatto, essendo* n *pari e positivo. Considerare in particolare il caso* $n=2$.

Scelto il punto fisso come polo (il lettore è pregato di farsi la figura), dette r e θ le coordinate polari e φ l'angolo che la

Digitized by Google

tangente fa col raggio vettore, la distanza del punto fisso dalla tangente è

$$r \operatorname{sen} \varphi = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

perchè

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{r'}.$$

L'equazione del problema è dunque

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = kr^n, \quad \text{donde} \quad r'^2 = \frac{1 - k^2 r^{2n-2}}{k^2 r^{2n-4}},$$

da cui facilmente

$$d\theta = k \frac{r^{n-2} dr}{\sqrt{1 - k^2 r^{2n-2}}} = \frac{1}{n-1} \frac{d(kr^{n-1})}{\sqrt{1 - (kr^{n-1})^2}} = \frac{1}{n-1} d \operatorname{arcsen} (kr^{n-1})$$

sicchè

$$\theta = \frac{1}{n-1} \operatorname{arcsen} (kr)^{n-1} + \theta_0, \quad \text{donde} \quad r = \frac{1}{k} \sqrt{\operatorname{sen} (n-1)(\theta - \theta_0)}.$$

È questa l'equazione delle curve richieste. Per $n = 2$ si ha

$$r = \frac{\operatorname{sen} (\theta - \theta_0)}{k}. \tag{1}$$

Queste curve coincidono, a meno di traslazioni e di rotazioni, con la curva

$$r = \operatorname{sen} \theta, \tag{2}$$

che si ottiene ponendo nella (1) $k = 1$, $\theta_0 = 0$. Trasformando la (2) in coordinate cartesiane, si ha

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

cioè

$$x^2 + y^2 = y \tag{2'}$$

che è la circonferenza (C), dove le coordinate di C sono $0, \frac{1}{2}$.

Ma, perchè (come richiede la (2)) a valori di θ compresi fra π e 2π (o più generalmente fra $(2m-1)\pi$ e $2m\pi$) corrispondano valori negativi di r, bisognerà alla (C) aggregare la (C'), simmetrica di essa rispetto all'asse x e considerare come negativi i raggi vettori come OM': ciò equivale a trasformare la (2) in coordinate

Digitized by Google

cartesiane scrivendo

$$-\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

donde

$$x^2+y^2=-y \tag{2''}$$

che è l'equazione della (C'). Si noti che la formola $r=\operatorname{sen}\theta$ si legge nel triangolo OMP e sarebbe facile vedere che la distanza di O dalla tangente in M è $\operatorname{sen}^2\theta$, come richiede l'enunciato.

Ed ora, ritornando alla (1) $r=\dfrac{\operatorname{sen}(\theta-\theta_0)}{k}$ dove nè $k=1$, nè $\theta_0=0$, possiamo dire che essa rappresenta tutte le coppie di circonferenze eguali e tangenti fra loro nel polo, sicchè le curve richieste dall'ultima parte dell'enunciato sono le coppie di circonferenze eguali e tangenti fra loro nel punto fisso.

Questa risposta è dovuta, anche nella sua forma ad un «Vecchio Abbonato»; altre ci pervennero dai proff. A. BARZAGHI, V. ARCIDIACONO, F. ANTONINI.

Risposta alla questione n. 148.

Dimostrare l'identità

$$\frac{2n(2n+3)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}^2=\sum_{h=0}^{n-1}\frac{1}{(n-h)(n-h+1)}\binom{4n-2h+2}{2n-h+1}\binom{2h}{h}.$$

Per $\left|\frac{x}{y}\right|<1$ si ha

$$(1)\quad \sum_{h=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n-h}-\frac{1}{n-h+1}\right)x^h y^{2n-h+1}=y^{n+1}\int\frac{x^n-y^n}{x-y}\,dy-$$

$$-y^n\int y\,\frac{x^n-y^n}{x-y}\,dy=-y^{n+1}\left(x^n\log(x-y)+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+n+1}\frac{y^{i+n+1}}{x^{i+1}}+C_0\right)+$$

$$+y^n\left(x^n y+x^{n+1}\log(x-y)+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+n+2}\frac{y^{i+n+2}}{x^{i+1}}+C_1\right)$$

dove, uguagliando nei due membri i coefficienti di y^{n+1} e rispettivamente di y^n, si ottiene $C_h=-x^{n+h}\log x$.

Pongo $x=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2$ e $y=\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2$ e cerco in (1) i termini indipendenti da α e β.

Digitized by Google

Nel primo membro, a sinistra, esso è

$$\sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{(n-h)(n-h+1)} \binom{2h}{h} \binom{4n-2h+2}{2n-h+1};$$

quello in $-y^{n+1}x^n \log(x-y) + y^n x^{n+1} \log(x-y)$ è zero, perchè l'uno di questi due monomi si trasforma nell'altro cambiando x in $-y$; quello in $x^n y^{n+1}$ è $\binom{2n}{n}\binom{2n+2}{n+1}$; e quello in

$$y^{n+1}x^n \log x - y^n x^{n+1} \log x$$

è

$$(2)\quad 2\binom{2n+2}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{2n}{n-i}\frac{1}{i} - 2\binom{2n}{n}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\binom{2n+2}{n+1-i}\frac{1}{i}$$

come si deduce osservando che per $|\alpha| > 1$ è

$$\log x = 2\log\alpha + 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{1}{i\alpha^{2i}}.$$

La (2) si trasforma in

$$\binom{2n}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{2(n+i+1)}{n+1}\binom{2n+1}{n-i}\frac{1}{i} - \right.$$

$$\left. -\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\frac{2(n+1)}{n-i+1}\binom{2n+1}{n-i}\frac{1}{i}\right] =$$

$$= (-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{2i(n+1)}{n+1-i}\binom{2n+1}{n-i} - (n+1)\right] =$$

$$= (-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{h=0}^{n}(-1)^h(n+1-h)\binom{2n+2}{h} =$$

$$= (-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{h}(-1)^k\binom{2n+2}{k} = -\frac{1}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}^2$$

dove si è posto $h = n+1-i$ e si è ricordata l'identità

$$\sum_{h=0}^{n}(-1)^h\binom{m}{h} = (-1)^n\binom{m-1}{n}.$$

Digitized by Google

Il termine indipendente da α e β nel membro a destra di (1) è adunque

$$\binom{2n+2}{n+1}\binom{2n}{n} - \frac{1}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}^2 = \frac{2n(2n+3)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}^2 \quad \text{c. v. d.}$$

Questa soluzione, unica pervenutaci, è dovuta, anche nella forma, al prof. A. BARZAGHI.

Risposta alla questione n. 149.

Di tutti gli esagoni inscritti in una ellisse trovare quello d'area massima.

Risolviamo la questione più generale:

Di tutti gli n-goni inscritti in un'ellisse, costruire quello di massima area.

Si abbia nel piano π un'ellisse di semiassi a e b ($a \geq b$). Consideriamo il cilindro che ha l'ellisse per sezione normale e tagliamolo con un piano π' passante per l'asse maggiore e formante con π un angolo α tale che $\cos\alpha = \frac{b}{a}$; la sezione è un circolo C di raggio a. Ogni n-gono inscritto nell'ellisse è la proiezione di un n-gono inscritto nel circolo C e l'area del primo serba un rapporto costante ($= \cos\alpha$) all'area del secondo, cosicchè tra gli n-goni inscritti nell'ellisse ha la massima area quello che è proiezione di un n-gono avente la massima area tra gli n-goni inscritti in C. Ne segue facilmente la costruzione voluta, ma è utile osservare che si può benissimo non uscire dal piano π, immaginando di ribaltare su questo il piano π'. In conclusione: ***Di tutti gli n-goni inscritti in un'ellisse, ha la massima area quello che si ottiene inscrivendo nel circolo che ha per diametro l'asse maggiore dell'ellisse un n-gono regolare qualsiasi e proiettando ogni suo vertice P normalmente all'asse maggiore sulla semiellisse che rispetto a questo è posta dalla stessa banda di P.*** È chiaro quindi che gli n-goni massimi inscritti in un ellisse sono in numero infinito e che ogni punto dell'ellisse si può assumere come vertice di un n-gono massimo inscritto in essa.

Questa soluzione è dovuta, anche nella sua forma, al prof. C. ROVETTI. Altre analoghe ci pervennero dai professori A. BARZAGHI, F. ANTONINI, G. CHINI e da un anonimo firmato Vecchio abbonato.

Digitized by Google

Risposta alla questione n. 152.

Trovare il limite della successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ***sapendo che ogni suo elemento, a partire dal terzo, è la media aritmetica (o geometrica o armonica) dei due precedenti.***

Essendo nel primo caso

$$a_{i+1} = \frac{a_{i-1} + a_i}{2} = a_1 + (a_2 - a_1) \cdot \sum_{n=0}^{i-1} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

si deduce

$$\lim_{i \to \infty} a_i = a_1 + (a_2 - a_1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{a_1 + 2a_2}{3}, \tag{1}$$

Gli altri due casi si riducono al primo sostituendo ad a_i in (1) rispettivamente $\log a_i$ ed $\frac{1}{a_i}$; e si ha nel secondo caso

$$\lim_{i \to \infty} a_i = \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2^2}$$

nel terzo caso

$$\lim_{i \to \infty} a_i = \frac{3a_1 a_2}{a_2 + 2a_1}.$$

Questa risposta è dovuta, anche nella sua forma al prof. A. Barzaghi. Altre ci pervennero dai professori A. Siciliano, F. Mazzarella, M. G. Sittignani, L. Toscano, L. Vingiani, M. Morini, F. Antonini, G. Chini e da un anonimo a firma Vecchio abbonato. Questi osserva che la questione non è nuova, e cita alcuni luoghi ove essa già si trova indicata; aggiunge che in una Nota del compianto prof. Camillo Rossi, *Sulla ricerca del limite di alcune successioni* (« Giornale di Matematiche » di Battaglini, vol. XLVII, 1909), sono studiate successioni molto più generali.

Digitized by Google

Atti della Società Italiana di Scienze fisiche e matematiche « Mathesis »

Congresso della Società.

Il congresso della Società Italiana di Scienze Fisiche e Matematiche « Mathesis », come da avviso con circolare ai soci, si è riunito nei giorni 1 e 2 novembre corrente presso l'Università di Perugia, in occasione della XVI Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze.

La seduta inaugurale che è stata insieme adunanza della classe A per la Società delle Scienze, si è aperta martedì 1° novembre alle ore 16. Anzitutto il Gr. Uff. Frascarelli, Direttore Generale dell'Istruzione Superiore e rappresentante del Ministero della Pubblica Istruzione, salutato a nome della « Mathesis » dal Presidente prof. Enriques, reca a sua volta a tutti i congressisti il saluto, l'adesione e l'attestato della simpatia del Ministro, richiamando in rapida sintesi il lavoro che la Società ha compiuto nei decenni della sua esistenza. Indi si sono svolte le annunciate conferenze:

L. Carnera, *Recenti vedute sulla evoluzione stellare.*

E. Persico, *Lo stato attuale della Fisica atomica.*

E. Bompiani, *Sui nuovi significati della Geometria.*

Tutti gli oratori sono stati calorosamente applauditi. La seduta è tolta alle ore 19.

La seconda seduta, che è contemporaneamente adunanza della Sezione prima (Matematica, Astronomia e Geodesia) della Società Italiana per il Progresso delle Scienze si apre alle ore 16 di mercoledì 2 novembre con la conferenza del prof. Alessandro Padoa « Arte e scienza del ragionare ». A nome di tutti i presenti l'oratore è vivamente complimentato e ringraziato dal prof. Enriques.

Digitized by Google

Indi il prof. Bortolotti pronuncia la sua brillante comunicazione « I progressi del metodo infinitesimale nell'opera geometrica di Evangelista Torricelli » che è calorosamente applaudita. Il Presidente rileva che essa costituisce una magnifica rivendicazione del genio italiano.

Quindi il prof. Mancini fa le sue comunicazioni: « Dimostrazione elementare della regola data dal sommo matematico Carlo Federico Gauss di Gottinga per determinare il giorno della Pasqua di qualunque anno » e « Deduzione di una equazione lunare corrispondente ad un sistema di intercalazione in esatta conformità con i canoni della riforma gregoriana del Calendario ». Il prof. Peano fa alcune osservazioni sulle comunicazioni precedenti.

Indi il prof. Bortolotti fa la sua seconda comunicazione « I prodromi della Geometria Analitica nella parte inedita dell' « Algebra » di Rafael Bombelli ».

La seduta è quindi tolta alle ore 18,30 ed è così chiuso il Congresso della Società « Mathesis ».

Nella seduta interna della « Mathesis » tenutasi la mattina del giorno 2 novembre il Presidente prof. Enriques riferisce sulle pratiche personalmente fatte da Lui e da diversi amici della Scuola di Matematica, presso il Ministro dell'Istruzione, per ottenere un qualche esaudimento dei voti espressi dalla Società stessa e riaffermati nell'ultimo congresso di Milano del 1925. Dà pure comunicazione dei passi analoghi che, in accordo col Consiglio direttivo della « Mathesis » sono stati tentati dalle Presidenze di altre Società scientifiche. Avverte tuttavia che a questi voti si oppongono due ordini di difficoltà: cioè

1° per quel che concerne il problema degli abbinamenti delle cattedre di Matematica e Fisica nelle Scuole medie, ostano difficoltà di principio che il Ministro stesso ha riaffermato in occasione della interpellanza del sen. Garbasso dinanzi al Senato;

2° invece per quel che concerne la questione degli orari il Ministro è in massima favorevole ad un'equa risoluzione del problema, ma trova ostacoli di ordine finanziario che, nell'attuale momento sono tanto più gravi, data la riduzione generale imposta ai bilanci.

Dopo una lunga discussione a cui partecipano, in senso diverso i proff. Amoroso, Sansone, Cattaneo, Padoa, Candido ed altri, il Presidente propone il seguente ordine del giorno:

« La Società Italiana di Scienze Fisiche e Matematiche « Ma-
« thesis »,

« senza riprendere l'esame delle questioni attinenti agli inse-
« gnamenti di Matematica e Fisica nelle Scuole medie, le quali
« sono state ampiamente dibattute e lumeggiate nei loro diversi

Digitized by Google

« aspetti dai precedenti Congressi della Società stessa, siccome « anche dalle relazioni e dai voti di molte altre Società scienti- « fiche e tecniche, di Facoltà universitarie e di Commissioni giu- « dicatrici per gli esami di Stato;

« riaffermando il significato umanistico della Scienza, il suo « valore formativo ed educativo della mente, fa voto:

« che S. E. il Ministro della P. I. voglia riesaminare il pro- « blema degli insegnamenti scientifici nella Scuola media, nel « senso di accrescerne l'importanza, anche e specialmente nel- « l'Istituto classico;

« e provvedere intanto agli orari delle discipline fisiche e « matematiche, inadeguati ai bisogni dell'insegnamento e troppo « gravosi per gli insegnanti di queste due materie abbinate ».

Viene chiesta la votazione per divisione parendo a qualcuno che il primo capoverso in cui si richiamano i voti di precedenti Congressi e Commissioni possa pregiudicare la questione teorica dell'abbinamento. Il Presidente dichiara che tale non è stato il Suo proposito; ad ogni modo mette in votazione l'ordine del giorno per divisione.

La seconda parte che dichiara il valore formativo della cultura scientifica e si conclude con un voto per la risoluzione del problema degli orari, è approvata all'unanimità.

Il primo capoverso è pure approvato dalla grande maggioranza dei presenti con soli 3 voti contrari: Amoroso, Bompiani e Finzi.

Dopo ciò il prof. Sansone presenta come raccomandazione alla Presidenza la seguente proposta:

« La Società Italiana di Scienze Fisiche e Matematiche « Ma- « thesis » fa voti perchè, in attesa dell'esame generale della que- « stione, siano mantenuti, nelle Scuole dove se ne presenta la « convenienza e la possibilità, separati gli insegnamenti di Mate- « matica e di Fisica ».

Messa ai voti è approvata a maggioranza votando contro: Bompiani, Amoroso, Bottari, Civinini e B. Levi.

Infine il prof. Bompiani fa a sua volta la proposta seguente:

« La Società Italiana di Scienze Fisiche e Matematiche « Ma- « thesis » per avviare la Riforma alla sua completa attuazione, « richiama l'attenzione di S. E. il Ministro della P. I. sul pro- « blema, di carattere universitario, della preparazione di inse- « gnanti adatti all'insegnamento abbinato della Matematica e « della Fisica ».

L'assemblea rimane perplessa, sembrando a qualcuno che il voto pregiudichi il problema teorico degli abbinamenti, ad altri

Digitized by Google

che, non al Ministro, ma alle Facoltà universitarie spetti di studiare la miglior preparazione degli insegnanti.

L'ordine del giorno, messo ai voti, è respinto a maggioranza.

I segretari
FINZI e MARONI

VERBALI DELLE SEZIONI

SEZIONE GENOVESE

Adunanza del 2 dicembre 1926.

La Sezione si è riunita alle ore 17 in un'aula del R. Istituto Tecnico, gentilmente concessa, per trattare il seguente o. d. g.:

a) GUARESCHI - « Sulla divisione dei polinomi »;

b) BEGGI - « Sulle curve piane razionali ».

Sono presenti i soci: Loria, presidente; Asturaro, Bedarida, Beggi, Bernini Arcero, Burnengo, Casali, Casazza, Ceruti, Civinini, Clarke, Giliberto, Goldbauer, Gonella, Grassi, Guareschi, Ivaldi, Lamberti, Luria, Marcellino, Padoa, Pascal, Sadun, Sbrana, Sittignani, Tacchella, Togliatti, Zaffagni, Zani.

Il Presidente nell'aprire la seduta rivolge un affettuoso saluto ai colleghi Gasparini e Rovetti che hanno lasciato la città, in seguito a trasferimento in altre sedi, e porge un cordiale benvenuto ai nuovi soci, particolarmente al prof. Togliatti, recentemente nominato professore di geometria analitica e proiettiva nella R. Università. Di poi, prendendo lo spunto dal fatto che nei programmi per i concorsi a cattedre di scuole medie si trova richiesta la conoscenza della Geometria non archimedea, fa voti che qualche socio voglia esporne i fondamenti in qualche articolo da pubblicarsi o nel « Periodico » o nel « Bollettino » del Conti.

Dà, quindi, la parola al prof. Guareschi il quale, trattando della divisione del polinomio $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$ per il polinomio $g(x) = b_0 x^m + \ldots + b_m$, osserva come fino ad ora non sia stata data un'espressione esplicita dei coefficienti $q_0, \ldots, q_{n-m}$ del quoziente e dei coefficienti $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$ del resto, considerati come funzioni razionali intere delle indeterminate

$$\frac{a_0}{b_0}, \ldots, \frac{a_{n-m}}{b_0}, a_{n-m+1}, \ldots, a_n, \frac{b_1}{b_0}, \ldots, \frac{b_{n-m}}{b_0}, b_1, \ldots b_m;$$

Digitized by Google

egli nota come una soluzione della questione si possa ottenere ponendo

$$\lambda_0 = 1,\ \lambda_p = \sum (-1)^{\beta_1+\ldots+\beta_p} \frac{(\beta_1+\ldots+\beta_p)!}{\beta_1!\ldots\beta_p!} \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^{\beta_1} \ldots \left(\frac{b_p}{b_0}\right)^{\beta_p},$$

l'ultima sommatoria essendo estesa a tutti i sistemi di numeri interi negativi $\beta_1, \ldots \beta_p$, soddisfacenti alla condizione

$$\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + p\beta_p = p,$$

e scrivendo

$$q_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{b_0} \lambda_{k-i} \qquad (k = 0, \ldots, n-m);$$

$$r_k = -\sum_{h=0}^{n-m} \frac{a_{n-m-h}}{b_0} \sum_{l=0}^{h} b_{k+1+l} \lambda_{h-l} + a_{n-m+1+k}.$$

Ulteriormente il prof. Guareschi generalizza la regola di Ruffini trattando il caso in cui il divisore sia $g(x) = (x-\alpha)^m$; si ha allora

$$q_k = \sum_{l=0}^{k} \binom{m-1+k-l}{m-1} a_l \alpha^{k-l};$$

$$r_k = (-1)^k \sum_{l=0}^{n-m} \binom{n-l}{m-1-k} \binom{n-m+k-l}{k} a_l \alpha^{n-m+k+1-l} + a_{n-m+k+1}.$$

Prende poi la parola il prof. Beggi, il quale, seguìto con interesse dai presenti, fa una breve comunicazione su una dimostrazione semplicissima del teorema di Riemann: *Una curva razionale ha il massimo numero di punti doppi, essa è cioè di genere zero.* Alla fine della comunicazione il prof. Loria ed il prof. Togliatti, pur rilevando che la dimostrazione proposta deve ritenersi come la più semplice fra le molte date del teorema, fanno alcune osservazioni e considerazioni sull'importante questione (1).

Infine il prof. Arcero Bernini svolge alcune considerazioni relative ai concorsi a premi banditi annualmente dal Ministero della P. I. per gli insegnanti medi e gli assistenti universitari di matematica e fisica; dopo breve discussione la Sezione vota all'unanimità il seguente o. d. g.:

---

(1) Le considerazioni svolte saranno pubblicate in esteso in altri periodici.

Digitized by Google

« La Sezione Ligure di " Mathesis „:

« Considerato che ai concorsi a premi che un tempo erano « banditi per incoraggiare la produzione scientifica degli inse- « gnanti medi, oggi possono concorrere anche gli assistenti uni- « versitari;

« Considerato che le condizioni di lavoro degli assistenti uni- « versitari e degli insegnanti medi sono profondamente diverse;

« Fa voti che i premi ministeriali per i lavori di matematica « e di fisica, anzichè essere assegnati globalmente ai concorrenti « delle due suddette categorie, vengano invece assegnati in parti « uguali a ciascuna categoria ».

E si prega la Presidenza della " Mathesis „ di interessarsi presso il Superiore Ministero, perchè appoggi la richiesta, cosicchè la sua eventuale accettazione possa avere effetto già nel prossimo concorso [1].

Alle ore 9 la seduta è tolta.

Il Segretario — GUARESCHI

Il Presidente — G. LORIA

Adunanza del 3 marzo 1927.

La Sezione si è adunata alle ore 17 in un'aula del R. Istituto Tecnico, gentilmente concessa per trattare il seguente o. d. g.:

a) PARODI R. - « Caduta di potenziale in un circuito elettrico, ed un paradosso che l'esperimento conferma ».

b) PADOA A. - « Un'equazione indeterminata di nono grado ».

Sono presenti i soci: Barolo, Bernini Arciero, Bonistalli, Burnengo, Casazza, Garibaldi, Gonella, Grassi, Guareschi, Padoa, Parodi, Pascal, Piersantelli, Rollo, Rosa, Rossi, Sadun, Sbrana, Sittignani, Straneo, Togliatti, Zani. Scusano l'assenza il Presidente prof. Loria ed il prof. Bedarida.

In assenza del prof. Loria, assume la presidenza il prof. Togliatti. Letto il verbale della seduta precedente, il prof. Parodi,

---

[1] Il voto qui contenuto essendo stato comunicato prima della trasmissione del verbale, la Presidenza ha fatto subito valere le considerazioni che lo suffragano presso la Presidenza della R. Accademia dei Lincei. E nella stessa Accademia fu espresso il desiderio che il Ministero conceda d'aumentare il numero dei premi assegnandoli appunto, separatamente, ad assistenti e insegnanti medi.

LA REDAZIONE

Digitized by Google

dopo alcune considerazioni sopra la misura della differenza di potenziale fra due punti di un circuito percorso da corrente elettrica, porta un esempio di un circuito percorso da corrente elettrica, senza che si noti tra due suoi punti qualunque alcuna differenza di potenziale. Quando il prof. Parodi, sempre attentamente seguito, ha terminato, il prof. Togliatti, ringrazia l'oratore, apre la discussione, alla quale partecipano i professori Bernini, Straneo, Parodi. Il prof. Straneo reca altri esempi di circuiti che presentano proprietà analoghe di quelle citate dal prof. Parodi.

Prende, quindi, la parola il prof. Padoa, il quale si occupa della risoluzione, mediante numeri interi tutti diversi da zero, dell'equazione:

$$(1) \qquad (x_1^3 + y_1^3)(x_2^3 + y_2^3)(x_3^3 + y_3^3) = 2^3$$

cui porge attrattiva la nota impossibilità che alcuno dei tre fattori del primo membro sia un cubo perfetto; e più precisamente di quelle soluzioni in cui i due addendi di ciascun fattore sono primi fra loro.

L'uso separato o prossimo dei procedimenti ricorrenti di VIETA e di LUCAS, per la risoluzione dell'equazione.

$$(2) \qquad x^3 + y^3 = (a^3 + b^3)\, t^3$$

in cui a e b sono arbitrari, purchè a sia maggiore del valore assoluto di b e primo con esso, genera infinite successioni crescenti distinte fra loro del tipo

$$(3) \qquad a^3 + b^3, \quad a_1^3 + b_1^3, \quad a_2^3 + b_2^3;$$

aventi il medesimo capofila prestabilito ed in ciascuna delle quali il rapporto di ogni elemento al precedente è un cubo perfetto; sicchè tre elementi, comunque scelti in dette successioni, purchè aventi lo stesso capofila, possono venire assunti quali fattori del primo membro delle (1).

Per questa via, si giunge a soluzioni della (1) come:

$$(4) \qquad (2^3 - 1^3)(5^3 + 4^3)(73^3 - 17^3) = 1008^3$$

$$(5) \qquad (2^3 + 1^3)(20^3 - 17^3)(919^3 - 271^3) = 27594^3$$

ma per altre vie se ne trovano soluzioni come:

$$(6) \qquad (4^3 + 3^3)(7^3 + 2^3)(8^3 + 5^3) = 91 \cdot 351 \cdot 637 = \\ = (7 \cdot 13)(3^3 \cdot 13)(7^2 \cdot 13) = 273^3$$

$$(7) \qquad (3^3 - 2^3)(5^3 + 3^3)(8^3 + 1^3) = 19 \cdot 152 \cdot 513 = \\ = 19(2^3 \cdot 19)(3^3 \cdot 19) = 114^3.$$

Digitized by Google

La (6) porge esempi di soluzioni della (1) indipendenti dalla (2). E la (7) è sufficiente a dimostrare che i procedimenti noti non forniscono tutte le soluzioni intere della (2).

Perciò il prof. Padoa si propone di proseguire la sua ricerca, per approfondire l'analisi dei procedimenti risolutivi della (2), nonchè della (1), anche indipendentemente dalla (2).

L'uditorio ha alla fine tributato un caloroso applauso al prof. Padoa, la cui esposizione è sempre stata seguita con vivo interesse.

Alle ore 19 la seduta è tolta.

Il Segretario — *p. Il Presidente*
G. GUARESCHI — E. G. TOGLIATTI

SEZIONE NAPOLETANA

Giovedì 2 giugno 1927, alle ore 17, nei locali della Facoltà di Matematica, la sig.na dott.ssa Maria del Re tenne una conferenza trattando *Dello spazio*. La conferenza, seguita con interesse dai molti socî ed invitati presenti, fu infine vivamente applaudita.

Il Presidente
G. SANNIA

SEZIONE MILANESE

Adunanza del 14 giugno 1927.

La Sezione si è riunita alle ore 17 in un'aula del Politecnico. Presiede il prof. Vivanti. Sono presenti i soci proff. Ambrosoli, Bianchi, Biggiogero, Chisini, Cisotti, Finzi, Gabba, Morra, Pastori, Pontremoli, Spera. Sono altresì presenti alcuni studenti. È giustificata l'assenza del prof. Maggi.

Il prof. Pontremoli parla del valore euristico della teoria delle dimensioni. Dopo essersi soffermato sull'omogeneità delle equazioni fisiche, l'oratore dà alcuni interessanti esempi in cui la teoria delle dimensioni permette di determinare leggi fisiche.

Il prof. Cisotti interloquisce sull'argomento, e il prof. Vivanti ringrazia l'oratore.

La seduta ha termine alle ore 18 e 15.

Il Segretario — *Il Presidente*
B. FINZI — G. VIVANTI

Digitized by Google

Atti dell'Istituto Nazionale per la Storia delle Scienze

Lettera aperta a S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione.

Eccellenza,

Gli studi concernenti la storia delle scienze non trovano oggi in Italia, quegl'incoraggiamenti e quei mezzi che sono richiesti dalla difficoltà e dall'importanza del compito da assolvere, e dall'alto interesse nazionale che vi si connette.

Accanto ai monumenti che attestano la grandezza secolare della nostra stirpe, accanto alle opere che hanno creato o ricreato nel Rinascimento i valori eterni della bellezza, le opere della scienza italiana danno al mondo il criterio universale della ricerca della verità, il metodo razionale e sperimentale, e le più grandi idee e le più grandi scoperte che hanno fruttificato la moderna civiltà scientifica. Ricostruire la storia delle scienze è, per gl'Italiani, acquistare consapevolezza di quanto vi è in essa d'italiano; spiegare nella sua interezza codesta storia, significa compiere la più superba esaltazione del genio nazionale, che possa darsi nell'ordine dello spirito. E questa deve essere insieme una rivendicazione, non solo degli uomini nostri, sì anche del vero valore delle idee che si trovano oggi a base della comune conoscenza dei popoli, degli organi dell'industria, dei mezzi di scambio, e di tutte le meravigliose invenzioni che hanno trasformato ai dì nostri la pratica della vita. La rivendicazione riuscirà tanto più spontanea, tanto più convincente ed imperiosa, quanto più la storia si allarghi con imparziale esame alle più alte produzioni scientifiche del mondo, riguardandole nella continuità storica della loro origine e del loro sviluppo, e perciò ricollegandole al nostro lavoro, che ne ha spesso gettato i semi fecondi.

Accanto a questo alto valore, gli studi storici ne hanno un'altro, non meno importante, di formazione educativa dello spirito per il progresso avvenire. Come, infatti, le grandi opere artistiche dei geni passati contengono il germe fecondo di nuove fatture, così nella storia delle grandi scoperte scientifiche, ed anche in quella dei grandi errori, si celano spesso i semi di nuove verità.

Consapevoli di questi valori, Gran Bretagna, Francia e Germania con giusto orgoglio dei propri meriti e con senso lungimirante delle forze ideali che operano nel contrasto della Società contemporanea, hanno dato e danno ogni giorno più vigoroso impulso agli studi di storia delle scienze, promovendo la pubbli-

Digitized by Google

cazione di classici, l'istituzione di biblioteche, la ricerca bibliografica e storica nelle sue varie forme, dalla raccolta delle fonti agli studi critici, fino alle sintesi ricostruttrici del progresso scientifico.

Ed è pur degno di nota che un paese nuovo come l'America, senza una tradizione propria da rivendicare, mostri interesse crescente per tale ordine di studii. Gli sforzi che essa oggi vi dedica offrono una prova luminosa del valore, anche pratico, che tende ad assumere ai dì nostri la ricerca della continuità storica delle idee.

In pari tempo l'apprezzamento che la nostra epoca fa di questi valori, ci ammonisce che non possiamo senza grave iattura nazionale rimanere indietro, in un campo che è e deve essere difeso come quello della nostra gloria.

Non si può dire che l'Italia sia rimasta del tutto estranea a questo moto degli studi concernenti la storia delle scienze.

Anche i passati governi hanno sentito, in date occasioni, il dovere imperioso di promuovere o sussidiare la pubblicazione delle opere di alcuni nostri grandi: ad es. l'edizione nazionale delle opere di Galileo, e quella che viene oggi intrapresa dalla Commissione Vinciana.

Ma, in genere, i lavori per tali edizioni sono riusciti estremamente difficili, ed il pubblico, ignaro delle difficoltà, ha manifestato spesso la sua meraviglia per la lunghezza con cui sono condotti.

Questi lavori infatti, per essere compiuti secondo le esigenze moderne, richiedono tutto un ambiente di cultura, che importa il possesso di una vasta biblioteca speciale, la risoluzione di una folla di problemi storici ed eruditi, e quindi il compimento di adeguate ricerche preliminari, e sopratutto la possibilità di trovare persone esperte e tecnicamente preparate.

Ora, tutto ciò che concerne la coltura storico-scientifica e la preparazione del paese è rimasto abbandonato alle sole forze dell'iniziativa privata. Peggio ancora, si è lasciato che i frutti di questa andassero dolorosamente dispersi, come è avvenuto per la biblioteca e in gran parte per l'opera avviata dal principe Boncompagni, che durante la sua vita spese più milioni di lire a vantaggio della storia delle matematiche. La conseguenza è stata che molte iniziative nostre hanno trovato la continuazione, con più larghi mezzi, in Germania ed in Francia.

Per ovviare a questo stato di cose, un gruppo di studiosi e di rappresentanti di diverse società scientifiche ha avvisato alla necessità di costituire un organo proprio tendente a creare, in questo campo, una vera collaborazione di sforzi. Da tale pensiero

Digitized by Google

è sorto l' *Istituto Nazionale per la Storia delle Scienze*, che con l'aiuto di alcune elargizioni private ha cominciato a stabilire una sala di consultazione presso la Biblioteca V. E, e a promuovere alcune pubblicazioni.

Ma è vano pensare che il semplice soccorso privato possa consentire lo sviluppo di un programma che deve assumere proporzioni consone all'importanza e alla vastità degli scopi.

Soltanto il Governo Nazionale, conscio della gravità e della urgenza del bisogno, per il prestigio d'Italia, può affrontare degnamente il problema, in ordine al suo proprio programma di espansione culturale della Nazione. E però al Governo Nazionale ci rivolgiamo a chiedere anzi tutto, in via di massima, se veramente gli sembri che accanto all' *Istituto Nazionale di Archeologia e Storia dell'Arte* meriti d'essere promosso e di avere assicurati i mezzi per il suo sviluppo anche un' *Istituto Nazionale per la Storia delle Scienze.*

Qualora il Governo, come vogliamo sperare, accolga tale ordine di idee ci permettiamo di segnare qui un quadro delle diverse funzioni ed esigenze che dovrebbe essere chiamato ad assolvere l' *Istituto Nazionale per la Storia delle Scienze.*

1° *Sede*: All'Istituto per la Storia delle Scienze conviene anzitutto assicurare una sede adatta a ricevere la Biblioteca e i diversi Uffici, di cui si dice in appresso.

2° L' Istituto deve comprendere:

a) una *Biblioteca* provvista delle grandi opere classiche e di tutte le opere di consultazione, repertori, riviste, ecc. che costituiscono il sussidio immancabile degli studi di Storia delle Scienze. Queste opere debbono essere messe a facile disposizione degli studiosi che hanno bisogno di adoperarle; i quali, anzi, debbono essere aiutati dal personale tecnico. Alla Biblioteca deve poi accompagnarsi un ufficio di *informazioni* e di *bibliografia*, la cui funzione opportunamente potrebbe estendersi in guisa da assolvere un *compito internazionale*, attraendo così in Italia studiosi ed esperti di tutto il mondo.

Un progetto in questo senso formò già argomento di discussioni presso l'Istituto di Cultura Internazionale della Società delle Nazioni a Parigi, e ne fu edotto a suo tempo il Ministero competente;

b) un *Museo* o *musei* in cui si raccolga e conservi la suppellettile scientifica, istrumenti, cimeli ecc. parte inalienabile del patrimonio storico nazionale;

c) l' *insegnamento* della storia delle Scienze in tutti i suoi rami principali, nonchè delle discipline metodiche che valgano ad abilitarvi particolarmente i giovani studenti delle Facoltà di di Scienze e di Medicina.

Digitized by Google

Lo Statuto dell'Università di Roma contempla già una *Scuola di perfezionamento in Storia delle Scienze*, che dovrebbe essere allargata e provveduta dei mezzi occorrenti, secondo i recenti voti delle Facoltà di Medicina e di Scienze fisiche matematiche e naturali e della Scuola speciale di geografia.

L'insegnamento fornito dalla Scuola di Storia delle Scienze può assolvere due scopi:

Uno scopo *generale di cultura*, anche in rapporto agl'insegnanti e ai futuri insegnanti delle Scuole medie, d'accordo colla lettera e collo spirito delle riforme scolastiche del Governo Nazionale; ed inoltre uno *scopo di preparazione specifica di storici, bibliografi* etc. Per l'uno e per l'altro scopo, ma soprattutto per il secondo, occorre qualche provvedimento diretto ad agevolare la frequentazione della scuola da parte di giovani studenti e laureati, come similmente si è fatto per l'Istituto d'Archeologia; cioè *istituzione di borse di studio* e *valorizzazione dei titoli scientifici* conferiti dalla Scuola;

d) *Istituto di ricerche, studi e pubblicazioni* fornito in guisa da poter preparare ad intraprendere opere di lunga lena, come la pubblicazione metodica di scritti scientifici inediti esistenti in pubbliche e private biblioteche italiane, o opere poderose di Classici, ovvero da fornire aiuto di notizie, fonti, personale, a quelle Commissioni o a quegli Enti che lo Stato abbia costituiti o voglia costituire nel seguito per fini speciali.

Roma, giugno 1927.

Il Comitato scientifico dell'Istituto Nazionale per la Storia delle Scienze

Prof. FEDERIGO ENRIQUES, Roma, *presidente* - Prof. SILVESTRO BAGLIONI, Roma, *vice presidente* - Prof. Sen. DAVIDE GIORDANO, Venezia, *presidente del Comitato dei congressi* - Prof. ROBERTO ALMAGIÀ, Roma - Prof. AUGUSTO BÉGUINOT, Modena - Prof. ALBERICO BENEDICENTI, Genova - Prof. GUGLIELMO BILANCIONI, Pisa - Prof. ETTORE BORTOLOTTI, Bologna - Prof. GUIDO CASTELNUOVO, Roma - Prof. ANDREA CORSINI, Firenze - Prof. CARLO DEL LUNGO, Firenze - Prof. Sen. ANTONIO GARBASSO, Firenze - Prof. AMEDEO GIANNINI, Roma - Prof. GINO LORIA, Genova - Prof. ROBERTO MARCOLONGO, Napoli - Prof. CARLO ALFONSO NALLINO, Roma - Prof. FEDERICO RAFFAELE, Roma - Prof. LUIGI SABBATANI, Padova - Prof. GIOVANNI VACCA, Roma - On. Gen. NICOLA VACCHELLI, Firenze - Prof. ALDO MIELI, Roma, *segretario*.

Digitized by Google

Il giorno 10 ottobre 1927 moriva in Milano il

DOTT. SILVIO BANDINI

ordinario di Matematica e Fisica nel R. Liceo-ginnasio « Cesare Beccaria » di Milano.

Nato a Faenza nel 1885, Silvio Bandini fece gli studi di matematica nell'Università di Bologna, dove si laureò nel 1905 ed ottenne il Diploma di Magistero nel 1907.

Appena laureato, entrò nell'insegnamento medio, vincendo brillantemente vari concorsi. Fu professore nelle Scuole Tecniche di Lugo, Bagnacavallo, Oderzo, Jesi, nelle Scuole Normali di Padova e Forlì, negli Istituti Tecnici di Sondrio e di Milano (« C. Cattaneo ») ed infine nel Liceo-ginnasio « C. Beccaria » di Milano.

Fu insegnante di non comune valore ed efficacia, non solo per la sua sicura e profonda conoscenza delle Matematiche, ma anche per l'entusiasmo col quale esercitava il suo ufficio, che era per lui un apostolato.

Pubblicò, in collaborazione col prof. C. Ciamberlini un *Corso di matematiche ad uso degli studenti degli Istituti Tecnici*; inoltre una memoria *Sui momenti quadratici di un sistema magnetico di punti*, ed una *Sull'insegnamento della matematica nelle Scuole medie inferiori.*

Della « Mathesis » fu socio fedele e affezionato; fu Vicepresidente della Sezione di Milano, ed ebbe larga parte nella preparazione e nello svolgimento del Congresso che ebbe luogo in quella città nel 1925, al quale presentò un'elaborata Relazione sull'azione svolta dalla Società in rapporto ai nuovi ordinamenti scolastici.

Sposo ad una egregia insegnante, già tanto gravemente provata dalla sventura, fu padre di due figliuoli, che formavano tutta la sua gioia.

Una grave malattia lo tenne in quest'anno lontano per lunghi

Digitized by Google

mesi dalla scuola; ristabilitosi e ritornato al suo ufficio, un repentino malore lo spegneva poche ore dopo che aveva lasciato le aule scolastiche.

I suoi funerali furono un plebiscito di affetto e di compianto, e la sua memoria durerà lungamente nel cuore degli allievi e dei colleghi.

G. VIVANTI

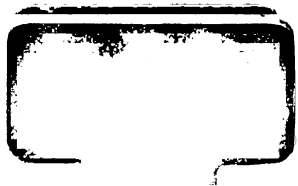
Direttore responsabile: AGILULFO RICCI

Bologna 1927 - Cooperativa Tipografica Azzoguidi

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google